大学への
数学III・C
ニューアプローチ

東京大学名誉教授・東海大学教授
藤田 宏
放送大学教授
長岡亮介
千葉工業大学教授
長崎憲一
東進ハイスクール講師
長岡恭史
共著

New Approach

研文書院

大学への
数学III・C
ニューアプローチ

東京大学名誉教授・東海大学教授
藤田宏
放送大学教授
長岡亮介
千葉工業大学教授
長崎憲一
東進ハイスクール講師
長岡恭史
共著

New Approach

研文書院

はしがき

本書が属しているシリーズ“大学への数学ニューアプローチ”は，姉妹編，数学Ⅰ，数学A，数学Ⅱ，数学Bのはしがきで述べたように，ふたつのキーワードのそれぞれに象徴される次のねらいをもっている．

その第一は，数学に関するかぎり**大学受験での成功**に自信が持てる学力を，将来の発展につながる**正統的な勉強**により身につけようとする諸君のお役に立つことである．

第二は，そのような**高い水準**に到達するための読者の**負担が最小化**されるように，すなわち，読者の努力が効率よく活き，才能が引き出されるように題材および表現の工夫をこらしてのニューアプローチ（新しい近づき方）を提供することである．

一流の大学――そこでは現代数学の研究者である教授達が数学の出題を行なう――の入試に関しては，高校数学の範囲であっても，浅薄な「技」や「術」を頼るべきではなく，やはり，正統的な理論を理解し，筋目のただしい問題解決力を身につけることが成功への王道である，また，こうした勉強が，理系のみならず文系の諸専門に進む場合にも，これからの社会で尊重される数学的な知性の育成につながるはずである．

“東大への解析Ⅰ，解析Ⅱ”として誕生した，大学への数学シリーズはすでに40年余の歴史を持っている．幸いに，大学へのシリーズにこめた，”正統的な勉学による実力の育成を”との我々の主張は、進学校の真剣な先生方の評価，および，気力と志に富んだ高校・受験生の支持を一貫して受け続けたのであった．”この伝統的な長所は今回のシリーズでも確保したつもりである．

一方，センター試験が高校生の心配事として先行する現実のもとでは，理論体系に忠実なあまり，あるいは性急な完全主義により，難行苦行を若い諸君に強いることは酷であり，実際的ではな

い．また，数学の優れた資質を備えた生徒のなかにも，大要を先に理解して後に知識の掘り下げに務めるのが大成の道であるタイプが少なくない．ニューアプローチから入ることをすすめたい場合である．

紙面づくりに関しても，視覚的な情報摂取への傾斜が著しい今日，現代風な体裁になれた読者がなじみやすいようにとの配慮から，“ニューアプローチ”では，A篇の簡素化，活字の改善、視覚的な印象の重視，発展的材料の巻末章への分離などを行なっている．しかし，最重要部分である問題篇のB篇では，従来のスタイルと性格を維持しつつ最近の動向をにらんでの更新に努めた．

さて，本書は，学習指導要領の用語を使えば，数学IIIと数学Cの主要部分を合併して編纂されている．本シリーズのこれまでの本は，検定教科書と同じ分冊構成をとってきたが，主に理系の研究者・技術者を志望する若者が選択する，高校数学の最終目標ともいうべき数学IIIと数学Cに関しては，その統合的取り扱いが，とりわけ高い水準の大学入試において重要な位置を占めるであろうという配慮に基づいたものである．紙数の都合から，数学Cの単元のうち，実践的な重要性の乏しい単元は，コンピュータの章にまとめたが，むしろ，指導要領の本来の精神に合致しているものと考える．これらの単元を学習する意義と目標については，それぞれの単元の導入文を見ていただきたい．

最後に，表だっては本書の著者陣に名を連ねてはいないが，本書の完成に対して，学識とセンスに基づいて大きな寄与をされた渡辺浩博士，若手の才気と活力を活かして貴重な寄与をして下さった乙藤隆史さん，元木稔さん（海城学園高校），谷川雅子さん（西武学園文理高校）に感謝したい．また，この機会に，日本の社会の命運に関わる数学教育の重要性を認識し，正統な数学の学習を支援する参考書の刊行という難事を遂行している，研文書院とその代表者飯塚信之氏に敬意を表すものである．

1997 年　春

藤田宏　長岡亮介　長崎憲一　長岡恭史

本書の特色

本書は，極めて個性の強い参考書であるが，その個性を短くまとめるなら，

基礎理論の解説・基本概念の説明に際しては，大学の立場に立って見てもおかしくない，きちんとしたものを与え
問題演習篇においては，真に取り組む価値のある良問を理論的・教育的配慮に基づいて体系的に精選・新作し，また〈なぜそのように解くか〉が伝わるような解答・解説をつけた

ということである．さらに，検定教科書の平板な叙述に飽きたらない読者のために，

上級の理論を視野に入れた発展的解説をもりこんだ

のも，他書にない特徴であろう．

本書の利用法

1°　A基礎篇で知識を整理した後に，B篇の演習問題を解くのが普通の学習の順序であろうが，必ずしもこれにこだわる必要はない．現在の力に応じて，解けそうなB篇の問題から手をつけるのも良い方法である．

2°　B演習問題の学習の理想的な形は，まず独力で問題に向かい，その結果を本書の解答と比較することである．しかし，読者の現在の実力によっては，まず，本書の解を熟読し，解法を支える基本的な考え方をしっかり理解するというのも，考えられる使い方の1つであろう．実際，本書で扱われる問題とそれに対するアプローチの考え方が理解できるだけで，大概の大学入試問題は，独力で解けるようになるはずである．

▨ 内 容 一 覧 ▨　A 基礎理論篇

▨ 内 容 一 覧 ▨　B 演習問題篇 (251 題)

§1　数列の極限　(32 題)

§2　関数とその微分　(32 題)

§3　微分法の応用　(67 題)

§4　関数の積分　(23 題)

§5　積分の応用　(22 題)

§6　微積分法の進んだ考察　(3 題)

§7　いろいろな曲線　(30 題)

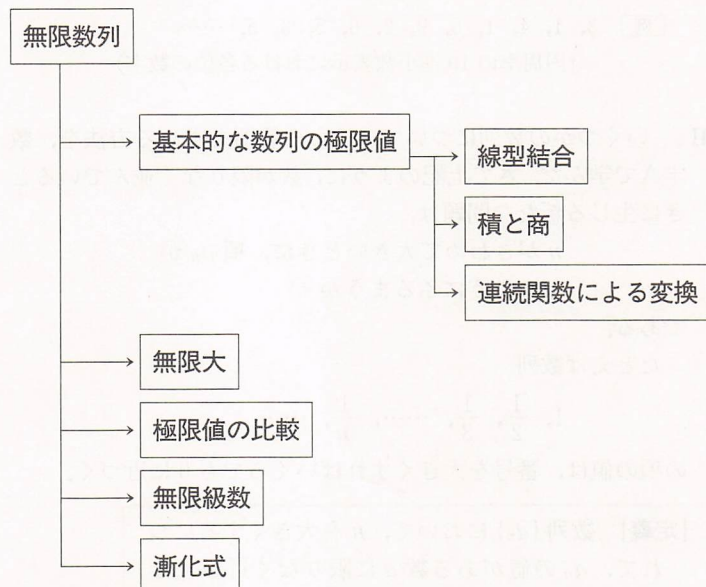
§8　行列と線型計算　(16 題)

§9　コンピュータの利用　(本セクションは，Ｂ篇を持たない)

§10　発展問題　(26 題)

内容一覧　◇◇◇

◇◇◇

Repos（ルポ）（フランス語で，ひとやすみの意味）

A1.1　無限数列

I．　一定の規則に従って，数を限りなく並べたもの

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

を (無限) 数列といい，$\{a_n\}$ と書く．

1°　例　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \cdots\cdots$

例　3，1，4，1，5，9，2，6，5，3，5，……
(円周率の 10 進小数表示における各位の数字)

II．　いくつかの数列について，その一般項を求める方法を，数学Aで学んだ．さて上記のように，数が限りなく並んでいるときに生じる新たな問題は，

n がきわめて大きいときに，項 a_n が
どのようにふるまうか

である．

たとえば数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\cdots$$

の項の値は，番号を大きくすればいくらでも 0 に近づく．

[定義]　数列 $\{a_n\}$ において，n を大きくするにつれて，a_n の値がある数 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に **収束** する，α は $\{a_n\}$ の **極限値** であるといい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

または，

$$a_n \to \alpha \quad (n\to\infty) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

と書く．

数列が収束しないとき，すなわち，極限値をもたないとき，その数列は **発散する** という．

極限値

1°　例　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

例　数列　1，-1，1，-1，…… は発散する．

III．例えば，数列　1，2，……，n，……の項は，項の番号を大きくすると，いくらでも大きくなる．このように，発散する数列 $\{a_n\}$ のふるまいにも基本的なタイプがある．

数列の定発散

[定義]　数列 $\{a_n\}$ に関し，n を大きくするにつれて a_n が限りなく大きくなるならば

$\{a_n\}$ は ∞ (**正の無限大**) に**発散**する

といい，記号では

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\quad \text{または}\quad a_n\to\infty\quad (n\to\infty)$$

と書く．

また，$\{-a_n\}$ が ∞ に発散するとき，

$\{a_n\}$ は $-\infty$ (**負の無限大**) に**発散**するといい，

記号では

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty,\quad \text{または}\quad a_n\to-\infty\quad (n\to\infty)$$

と書く．

1°　例　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$

例　$\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

2°　$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ や $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ は，発散の特別な場合である．

A1.2　基本的な数列の極限値

まず基本的な数列の極限から出発しよう．

n のベキの極限値

I．[定理]　α を定数とするとき，

数列 $\{n^\alpha\}$ が収束する $\Longleftrightarrow$ $\alpha\leqq 0$

詳しくは，

$\alpha>0$　ならば　$\lim_{n\to\infty} n^\alpha=\infty$

$\alpha=0$　ならば　$\lim_{n\to\infty} n^\alpha=1$

$\alpha<0$　ならば　$\lim_{n\to\infty} n^\alpha=0$

II．

> [定理]　x を定数とするとき，
> 数列 $\{x^n\}$ が収束する
> $\iff -1<x\leqq 1$
> 詳しくは，
> $-1<x<1$　ならば　$\lim_{n\to\infty} x^n=0$
> $x=1$　ならば　$\lim_{n\to\infty} x^n=1$
> $1<x$　ならば　$\lim_{n\to\infty} x^n=\infty$

等比数列の極限値

A1.3 より複雑な極限の構成

基本的な数列の極限をもとにして，より複雑な数列の極限を考える．

I．線形結合

> [定理]　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束するとき，数列 $\{\alpha a_n+\beta b_n\}$ も収束し，
> $$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\lim_{n\to\infty} a_n+\beta\lim_{n\to\infty} b_n$$
> ただし，α，β は定数である．

線形結合の極限

1°　例　$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1\pm\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$

II．積

> [定理]　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束するとき，数列 $\{a_nb_n\}$ も収束し，
> $$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

積の極限

1°　例　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$

2°　特に $\lim_{n\to\infty} ka_n=k\lim_{n\to\infty} a_n$ が成立する．(ただし k は定数)

Ⅲ. 商

> [定理] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束し,
> $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば, 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ も収束し,
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

商の極限値

1° 例 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}=\dfrac{2}{3}$

2° $b_n=0$ であるような n に対して $\dfrac{a_n}{b_n}$ は意味がないけれども, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta\neq 0$ ならば, n が十分大きくなると b_n は β に近い値となるので, $b_n\neq 0$ である.

Ⅳ. 連続関数による変換

> [定理] $f(x_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ が定義され,
> $\{x_n\}$ が a に収束するとき,
> $f(x)$ が $x=a$ で連続
> $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$

連続関数と極限値

1° 関数の連続性については, ☞ A 2.6

2° 例 $\log x$ は $x=1$ で連続だから,

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log 1=0$$

A1.4　無限大の演算

極限値の演算を，発散する場合に拡張しよう．

> [定理]　$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ とすると
>
> (i)　$\lim_{n\to\infty}(a_n+c)=\infty$　（c は任意の定数）
>
> (ii)　$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$
>
> (iii)　$\lim_{n\to\infty} ka_n=\infty$　（k は正の定数）
>
> (iv)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$

1°　上記の事実を象徴的に，$\infty+c=\infty$，$\infty+\infty=\infty$，$k\infty=\infty$，$\dfrac{1}{\infty}=0$ と表現することもできる．

2°　$\infty-\infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ という形の極限は注意を要する．

例　$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}2n=\lim_{n\to\infty}n=\infty\\ \lim_{n\to\infty}(2n-n)=\infty\end{cases}$

この場合は，いわば，$\infty-\infty=\infty$．

例　$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\lim_{n\to\infty}n=\infty\\ \lim_{n\to\infty}((n+1)-n)=1\end{cases}$

この場合は，いわば，$\infty-\infty=1$

例　$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}n^2=\lim_{n\to\infty}n=\infty\\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0\end{cases}$

すなわち，$\dfrac{\infty}{\infty}=\infty$ となることも $\dfrac{\infty}{\infty}=0$ となることもある．

3°　上記のように ∞ どうしの演算は一般的な形では正当化されないので，∞ を普通の数のように扱うことはやはり無理である．

A1.5 極限値の比較

I．2つの数列の大小関係は，極限値に遺伝する．

≦の保存

> [定理]　$a_n \leqq b_n$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) が成り立ち，
> $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ のどちらもが存在するならば
> $$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

1°　この定理を視覚にうったえる形に書くと，

$$a_n \leqq b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

2°　“$a_n < b_n \Longrightarrow a_n \leqq b_n$” であるから，上の定理にしたがって

$$a_n < b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

は保証される．だが，

$$a_n < b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成立するとは限らない．

例　$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$ とすれば，$a_n < b_n$ であるが

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

II．数列の大小関係を利用して，極限値を求めうる場合がある．

はさみ打ち

> [定理]　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において
> $$b_n \leqq a_n \leqq c_n \quad \cdots\cdots ①$$
> が成り立ち，
> $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \quad \cdots\cdots ②$$
> ならば，$\{a_n\}$ も収束し，
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \cdots\cdots ③$$
> である．

1°　例　$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n} \leqq \frac{1}{n}$ かつ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

よって，$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n} = 0$

2°　定理の特別の場合として，“定数への押しつけ”が成立する．たとえば

$$0 \leqq a_n \leqq b_n \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

III．無限大へ向かって“押し上げる”こともできる．

> **[定理]**　$a_n \leqq b_n$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が成立するとき，
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$
> $$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

A1.6　無限級数

I．無限個の数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots$ の加え合わせを，次のように定式化する．

級数の和

> **[定義]**　数列 $\{a_n\}$ からつくられた級数
> $$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots ①$$
> に関して，次の数列 $\{S_n\}$ を考える．
> $$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
> $$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$
> S_n を級数①の n 項までの **部分和** という．
>
> $\{S_n\}$ が収束し，その極限値が S であるとき，すなわち
> $$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$
> であるとき，級数①は S に **収束する**，あるいは，級数①の **和** は S であるという．記号では
> $$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots = S,\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$
> などで表す．
>
> $\{S_n\}$ が発散するとき，級数①は **発散する，和をもたない** という．

1°　例1　$2+1+0+0+\cdots\cdots+0+\cdots\cdots$（第3項以後はすべて0）の場合，

$$S_1=2,\ S_2=3,\ S_3=3,\ S_4=3,\ S_5=3,\ \cdots\cdots$$

$n\geqq 2$ のとき $S_n=3$ であるから，$\lim_{n\to\infty}S_n=3$ である．よって，

$$2+1+0+0+\cdots\cdots+0+\cdots\cdots=3$$

例2　$1+2+3+\cdots\cdots+n+\cdots\cdots$ の場合，

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \lim_{n\to\infty}S_n=\infty$$

であって，$\{S_n\}$ は発散する．

2°　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ のとき，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\infty$ と書くことがあるが，発散する級数は，数としての意味をもたない．例えば，形式的に

$$S=1+1+1+\cdots\cdots$$

などと書いても，たちまち

$$S=1+(1+1+1+\cdots\cdots)=1+S$$

$$\therefore\quad 0=1$$

のように矛盾に逢着する．

II．等比数列の和の公式

$$1+r+r^2+\cdots\cdots r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}\quad (r\neq 1)$$

を用いると，次の定理が得られる．

無限等比級数

［定理］　初項 a が0でないとき，公比 r の無限等比級数

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$$

は，$-1<r<1$ のときに限り和をもち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

1°　例　$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$

Ⅲ. 数列の極限に関する定理から，無限級数に関する定理を導くことができる．

> **[定理]** 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束するとき，
>
> (i) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$ も収束して
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
>
> (ii) $a_k \leqq b_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ ならば
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

1° 上記の(i)を用いて，複雑な級数を基本的な級数の和に分解して計算することができることがある．

2° $a_k \leqq b_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のときは，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\infty \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k=\infty$$

Ⅳ. 無限級数が収束するか発散するかを判定することは，応用上極めて重要であるが，多くの場合大変難しい．しかし，次のことは簡単に分かる．

> **[定理]** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束する $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$

1° **証明**：$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=0$$

2° この定理の対偶をとると

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を満たさない数列の和は収束しない

となり，無限級数が発散するための1つの十分条件を与える．

☞ B.119 (2)

3° この定理の逆は成立しない．数列や無限級数が収束することを保証する強力な定理については，A 6.4 で説明することにしよう．

A1.7　漸化式の解と極限値

I．漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=f(a_n) \quad (n=1, 2, 3, \cdots) & \cdots\cdots\cdots ① \\ a_1=a & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式として表しておけば，その極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べることができる．しかし，a_n を n の式で表すのが困難な場合でも極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ について論ずる方法がある．

もしも極限

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} a_n$$

が存在し，関数 f が $x=\alpha$ で連続であるとする．
このとき①の両辺で $n\to\infty$ の極限をとると，

$$\alpha=f(\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．すなわち，①，②を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限値は，方程式

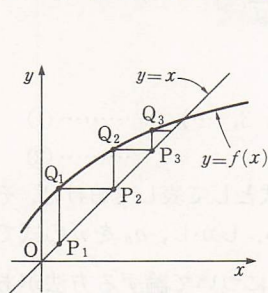
$$x=f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

の(ひとつの)解である．

1°　連続関数については　☞ A 2.6，A 1.3 IV

2°　方程式④を満たす α が存在するからと言って，$\{a_n\}$ がその α に収束するとは限らない．また④の解 α が2つ以上あるとき，そのうちのどれに収束するかを決めるには，別の考察が必要である．
☞ B.117，B.118

3°　a_1，a_2，a_3，…… を①，②から直接計算することにより，④の解の近似値を得るという逆の発想もある．☞ A 3.5 II

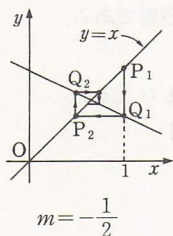
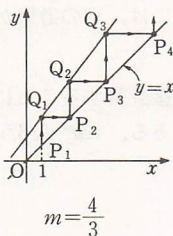
II．$y=f(x)$ のグラフと漸化式の解

xy 平面上に
曲線 $C:y=f(x)$,
直線 $g:y=x$
を描く．ついで，
直線 g 上に点列
P_1, P_2, P_3, ……,
曲線 C 上に点列
Q_1, Q_2, Q_3, ……
を，まず，$P_1(a_1,\ a_1)$ とし，

$P_1Q_1 /\!/ y$ 軸，$Q_1P_2 /\!/ x$ 軸，
$P_2Q_2 /\!/ y$ 軸，$Q_2P_3 /\!/ x$ 軸，
………………………………

のように，P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, …… の順につぎつぎと作図してゆく．

その作り方により，Q_1 の座標は $(a_1,\ f(a_1))=(a_1,\ a_2)$ であり，したがって，P_2 の座標は $P_2(a_2,\ a_2)$ である．そこで，Q_2 の座標は $(a_2,\ f(a_2))=(a_2,\ a_3)$，したがって，$P_3(a_3,\ a_3)$ となる．以下，同様の論法により，一般に

$$P_n=(a_n,\ a_n),\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であることがわかる．したがって，点 P_n が n の値によってどう変わるかをみると，数列 a_n のおよその様子がわかる．

$m=-\dfrac{1}{2}$　　$m=\dfrac{4}{3}$

1°　例　$a_{n+1}=ma_n+1$, $a_1=1$：
$y=mx+1$ は傾き m の直線である．
たとえば，

$m=-\dfrac{1}{2}$ ならば収束，

$m=\dfrac{4}{3}$ ならば発散

となることが図からわかる．

——A1　おわり——

Repos

i はすべてを包む

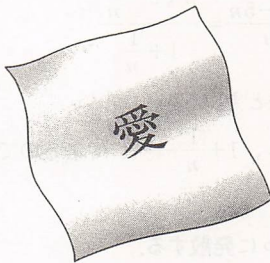
$\sqrt{-1}$ を i と表すのは，実数でない数をデカルト(R. Descartes　1596〜1650)が「想像上の数(英語にすると imaginary number)」と呼んだことに由来するのですが，数学史の展開はやがて，この想像上の数＝虚数が 実在の数の世界を支えていること，虚数を通して初めて実在の数の世界の美しい秩序が見えてくることを明らかにしました。

現在，高等数学は虚数なしには，まったく成立しません。

ところで我国では，昔，自分の名前や家紋を染めた風呂敷を配る習慣がありました。ある数学者が知人に配った風呂敷の中央には，“i”という文字が1つだけ染めぬかれていたということです。不可解に思った人が尋ると，その数学者は，

i はすべてを包む

と答えたといいます。虚数 i のもつ数学的意味と，英語のアルファベットとしての i の呼び名とを洒落た，いかにも数学者らしいユーモアだと思いませんか。

—— Repos（ルポ）（フランス語で，ひとやすみの意味）——

B.101

次の数列の極限値を求めよ．

(1) $a_n=\dfrac{2n+1}{3n+1}$　　(2) $a_n=\dfrac{(n-1)(3n+1)}{n^2+2n+3}$

(3) $a_n=\dfrac{3n}{n^2+1}$　　(4) $a_n=\dfrac{n^3+2n^2-5n}{n^2+n}$

アプローチ いずれも，いわゆる $\dfrac{\infty}{\infty}$ というタイプの不定形の極限値です．本問のような $\dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$ の形の数列の極限を求めるには，分母の最高次の項で分母・分子を割り，定数 α に対し，$\lim_{n\to\infty} n^\alpha=\begin{cases}\infty & (\alpha>0)\\ 0 & (\alpha<0)\end{cases}$ が利用できる形に変形します．

分母・分子を n で割った．▶

解答 (1) $a_n=\dfrac{2n+1}{3n+1}=\dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\longrightarrow \mathbf{\dfrac{2}{3}}.\ (n\to\infty)$

分母・分子を n^2 で割った．▶

(2) $a_n=\dfrac{(n-1)(3n+1)}{n^2+2n+3}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1\cdot3}{1}=\mathbf{3}.$

分母・分子を n^2 で割った．▶

(3) $a_n=\dfrac{3n}{n^2+1}=\dfrac{\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\longrightarrow \dfrac{0}{1}=\mathbf{0}.\ (n\to\infty)$

分母・分子を n^2 で割った．▶

(4) $a_n=\dfrac{n^3+2n^2-5n}{n^2+n}=\dfrac{n+2-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

ここで，$n\to\infty$ のとき，

$n+2-\dfrac{5}{n}\longrightarrow\infty,\ 1+\dfrac{1}{n}\longrightarrow 1$ であるので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$$

つまり，**$\{a_n\}$ は ∞ に発散する．**

B.102

次の数列の極限値を求めよ．

(1)　$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$　　(2)　$a_n=\sqrt{n^2+5n-3}-\sqrt{n^2+1}$

(3)　$a_n=\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

アプローチ　(1)，(2)はともに $\infty-\infty$ のタイプの不定形，(3)はそのような不定形を分母・分子にもつタイプの不定形の極限です．一般に，$\sqrt{}-\sqrt{}$ という形の式の極限の計算では，有理化がしばしば有効です．

解答　(1)　$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

◀ 分子の有理化

$$=\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

◀ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\longrightarrow \mathbf{0}.\ (n\to\infty)$$

(2)　$a_n=\sqrt{n^2+5n-3}-\sqrt{n^2+1}$

$$=\frac{n^2+5n-3-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+5n-3}+\sqrt{n^2+1}}$$

◀ 分子の有理化

$$=\frac{5n-4}{\sqrt{n^2+5n-3}+\sqrt{n^2+1}}$$

◀ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になった．

$$=\frac{5-\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{5}{1+1}=\mathbf{\frac{5}{2}}.$$

◀ 分母・分子を n で割った．

(3)　$a_n=\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$$=\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{n+2-n}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

◀ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になった．

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{3}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1}=\mathbf{\frac{3}{2}}.$$

◀ 分母・分子を $\sqrt{n}$ で割った．

B.103

次の数列の極限値を求めよ．

(1)　$a_n=\dfrac{2^n-4}{3^n+1}$　　(2)　$a_n=\dfrac{(-3)^n-(-2)^{n+1}}{(-3)^n+2^n}$

(3)　$a_n=\dfrac{4^n+3^n}{3^n+2^n}$　　(4)　$a_n=\dfrac{(-4)^n+3}{2^n+1}$

アプローチ　$-1<r<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n=0$ が使える形に変形します．

解答　(1)　$a_n=\dfrac{2^n-4}{3^n+1}$

分子・分子を 3^n で割る． ▶

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-4\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}\longrightarrow \frac{0}{1}=\mathbf{0}.\ (n\to\infty)$$

$n\to\infty$ のとき，$\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ ▶

(2)　$a_n=\dfrac{(-3)^n-(-2)^{n+1}}{(-3)^n+2^n}$

分母・分子を $(-3)^n$ で割る． ▶

$$=\frac{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\longrightarrow \frac{1}{1}=\mathbf{1}.\ (n\to\infty)$$

$n\to\infty$ のとき，$\left(-\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ ▶

(3)　$a_n=\dfrac{4^n+3^n}{3^n+2^n}=\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

分母・分子を 3^n で割った． ▶

ここで，$n\to\infty$ のとき，$\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ であるので，この分母は1に収束するが，$\left(\frac{4}{3}\right)^n\to\infty$ であるので，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$．

よって，数列 $\{a_n\}$ は発散する．

極限値は存在しない． ▶

(4)　$a_n=\dfrac{(-4)^n+3}{2^n+1}=\dfrac{(-2)^n+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$n\to\infty$ のとき，$\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0$ となるが $(-2)^n$ は振動し収束しない．

よって，数列 $\{a_n\}$ は発散する．

極限値は存在しない． ▶

B.104

a，b を n に依らない正の定数とするとき，

極限値 $L=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ を求めよ．

アプローチ たとえば，$a=2$，$b=1$ のときは，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$$

$a=2$，$b=3$ のときは，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3$$

となるので，どうやら a，b の大小によって場合分けが必要です．

解答

(i)　$a>b$ のとき，$0<\dfrac{b}{a}<1$ より $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\to 0$ $(n\to\infty)$

よって，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a.$$

(ii)　$a<b$ のとき，与えられた式が，a，b の対称式であることを考えれば，

(i)の結論 「$a>b \Longrightarrow L=a$」

において，a と b とを入れ換えることにより，$L=b$ である．

(iii)　$a=b$ のとき，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}=\lim_{n\to\infty}a=a.$$

以上まとめて，

$$L=\begin{cases}\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}\geqq\boldsymbol{b})\\ \boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{b})\end{cases}$$ となる．

◀ 結果は $L=\max\{a,\ b\}$ と表すこともできる．

B.105

$y=f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$ のグラフをえがけ.

アプローチ $|x|$ と 1 の大小で分類します.

解答 (i) $|x|<1$ のとき,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるので,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}=x^2+x.$$

(ii) $|x|>1$ のとき, $x^2>1$ より, $0<\dfrac{1}{x^2}<1$ であるので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$$

分母・分子 x^{2n} で割った. ▶

$$\therefore\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2+x}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}.$$

(iii) $x=1$ のとき,

$x^{2n-1}=x^{2n}=1$ であるので,

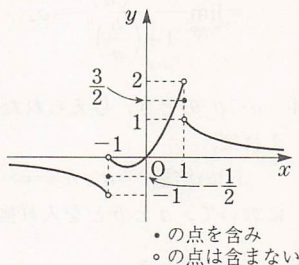
$$f(x)=f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

(iv) $x=-1$ のとき,

$x^{2n-1}=-1$, $x^{2n}=1$

であるので,

$$f(x)=f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+1-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

以上より, $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる.

［注］ 一般に, $\lim_{n\to\infty}x^n$ は $x>1$, $x<-1$ の場合でそれぞれ「∞ に発散」,「振動」と大きく異なるが, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}$ はともに「0 に収束」する.

B.106

無限数列についての次の各々について，正しいか，誤っているかを判定し，誤っているものには反例をあげよ．

(1)　$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，つねに $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は発散する．

(2)　$\{a_n\}$ が収束し，$\{b_n\}$ が発散すれば $\{a_n b_n\}$ はつねに発散する．

(3)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がともに収束し，すべての n について $a_n \neq 0$ であれば つねに $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ も収束する．

(4)　$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ ならば，つねに $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在して等しい．

(5)　$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ であるならば，つねに $\{a_n\}$ は収束する．

アプローチ　“p ならばつねに q である”という主張に対し，p であるのに q でないという例を反例 (counterexample) といいます．

解答　すべて誤っている．

(1)　$a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$　($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) とおくと，

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるが，$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n}$　だから　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 0$．

(2)　$a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = n$　($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) とおくと，

$a_n \to 0$，$b_n \to \infty$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$．

(3)　$a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$　($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) とおくと，

$a_n \to 0$，$b_n \to 0$ であって，しかも $a_n \neq 0$ であるが，

$\dfrac{b_n}{a_n} = n \to \infty$．

(4)　$a_n = n + \dfrac{1}{n}$，$b_n = n$　($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) とおくと，

$a_n - b_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ は存在しない．

(5)　$a_n = \log n$　($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) とおくと，

$$a_{n+1} - a_n = \log(n+1) - \log n = \log\frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

となるから，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しない．

B.107

p, q, a は与えられた定数で $p \neq 1$ とする．漸化式

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = pa_n + q \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

アプローチ このタイプの定数係数の２項間漸化式で定められる数列の一般項の求め方は，数学Ａで学んでいるので，一般項を求めてから，その極限を考察すればよいでしょう．

解答 $a_{n+1} = pa_n + q$ ………①

①において，a_n, a_{n+1} を形式的に α とおくと，

$$\alpha = p\alpha + q \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となり，$p \neq 1$ より②を満たすのは $\alpha = \dfrac{q}{1-p}$ である．

①－② を作ると，定数項 q が消去できて，

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

これより数列 $\{a_n - \alpha\}$ は公比 p の等比数列となり，

$$a_n - \alpha = p^{n-1}(a_1 - \alpha)$$

等比数列の一般項の公式を用いた．

$\alpha = \dfrac{q}{1-p}$, $a_1 = a$ であるから

$$a_n = \left(a - \frac{q}{1-p}\right)p^{n-1} + \frac{q}{1-p}$$

ここで，$n \to \infty$ としたときの極限を考えると，収束するのは

$$a = \frac{q}{1-p} \quad \text{または} \quad |p| < 1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$a = \dfrac{q}{1-p}$，すなわち $pa + q = a$ の場合，n によらず $a_n = a$ である．

のときであって，このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$$

③以外の場合には $\{a_n\}$ は収束しない．

以上をまとめて，

$pa + q = a$ または $|p| < 1$ の場合 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$

その他の場合は，発散する．

注意 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定して，それを α とおくと，与えられた漸化式において $n \to \infty$ とすれば，

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(pa_n + q) \quad \therefore \quad \alpha = p\alpha + q$$

となる．つまり，②で定まる α は，数列 $\{a_n\}$ の極限値にほかならない．しかし，上の解答で示したように，極限値が存在するのは，$-1 < p < 1$ または $pa + q = a$ の場合だけである．

B.108

3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ があって，その各項の間に

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

なる関係があるとする．各数列の極限値を a_1, b_1, c_1 で表せ．

アプローチ $\{a_n\}$ のみの漸化式を作ろうとするのが1つの着眼点です．

解答 $n\geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{c_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)$$

すなわち，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

◀ 3項間漸化式
☞『大学への数学Aニューアプローチ』

これは，　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a_n-a_{n-1})$

と変形できるので，$\{a_n\}$ の階差数列は，初項 a_2-a_1, 公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列をなしている．

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a_1+(a_2-a_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=a_1+\frac{2}{3}(a_2-a_1)$$

$a_2=\dfrac{b_1+c_1}{2}$ を代入して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{\frac{1}{3}(a_1+b_1+c_1)}$ を得る．

対称性により $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ も上と同一の極限値に収束する．

［注］ 本問の場合，極めて良い関係式

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成立することから，これを利用して

$$a_n+b_n+c_n=a_1+b_1+c_1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が得られる．この関係を用いると，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ のそれぞれについての漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}(a_1+b_1+c_1) \\[2mm] b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}(a_1+b_1+c_1) \\[2mm] c_{n+1}=-\dfrac{1}{2}c_n+\dfrac{1}{2}(a_1+b_1+c_1) \end{cases}$$

が導かれ，これらからたやすく，a_n, b_n, c_n を求めることができる．

B.109

x の関数 $f_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \cdots\cdots$) が，$f_0(x)=1$，$f_1(x)=x$ および

(＊) $2f_{n+1}(x)=(3x+1)f_n(x)-(3x-1)f_{n-1}(x)$ $(n \geqq 1)$

によって定められている．

(1) 自然数 n に対して，$f_{n+1}(x)-f_n(x)$ を n と x の式で表せ．

(2) 自然数 n に対して，$f_n(x)$ を n と x の式で表せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するような x の値の範囲および $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

解答 (1) (＊)より，任意の $n \geqq 1$ に対し，

$$2\{f_{n+1}(x)-f_n(x)\}=(3x-1)\{f_n(x)-f_{n-1}(x)\}$$

$$\therefore\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{3x-1}{2}\{f_n(x)-f_{n-1}(x)\}$$

x を定数と見なすと，数列 $\{f_{n+1}(x)-f_n(x)\}$ は，公比 $(3x-1)/2$ の等比数列をなしている．

$$\therefore\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)=\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n\{f_1(x)-f_0(x)\}$$

$f_1(x)=x$，$f_0(x)=1$ より

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\boldsymbol{(x-1)\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n}.$$

(2) (1)で得た結果を用いて

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{f_{k+1}(x)-f_k(x)\}=\sum_{k=0}^{n-1}(x-1)\left(\frac{3x-1}{2}\right)^k$$

i) $x \neq 1$ のとき $f_n(x)-f_0(x)=\dfrac{(x-1)\left\{1-\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{3x-1}{2}}$

$$=-\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n\right\}$$

$n=0$ でも O.K. ▶

$$\therefore\quad f_n(x)=\boldsymbol{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{3x-1}{2}\right)^n}.$$

ii) $x=1$ のとき $f_n(1)-f_0(1)=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{f_n(1)=1}$.

(3) $x \neq 1$ のとき，極限が存在するのは

$$-1<\frac{3x-1}{2}<1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{-\frac{1}{3}<x<1}$$

のときで，このとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.

$\boldsymbol{x=1}$ のときは，$f_n(1)=1$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) だから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1)=\boldsymbol{1}.$$

B. 110

アルキメデスの公理：“$h>0$ ならば $\lim_{n\to\infty} nh=\infty$” およびベルヌイの不等式：“$h>0$ のとき $(1+h)^n>1+nh$ $(n=2, 3, \cdots\cdots)$” を利用し，つぎのことがらを証明せよ．ただし，a は定数である．

(1)　$a>1$　ならば　$\lim_{n\to\infty} a^n=+\infty$

(2)　$-1<a<1$　ならば　$\lim_{n\to\infty} a^n=0$

アプローチ　指数関数の定義やグラフを考えれば，アタリマエと感じられる事実を，より根本的な事実(アルキメデスの公理)を基に証明しようという問題です．なお，ベルヌイの不等式は，二項定理を用いて左辺を展開するほか，数学的帰納法によっても証明することもできます．

解答　(1)　$a=1+h$ とおくと，a が1より大きい定数だから，h は正の定数である．よって，

$$a^n=(1+h)^n>1+nh \quad (n\geqq 2) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\lim_{n\to\infty} a^n=+\infty$　である．■

(2)　$a=0$ のときは，$a^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0$$

◀ $a=0$ のときだけ例外扱いが必要．

となるので，$-1<a<1$，$a\neq 0$ の場合を考える．このとき，

$\left|\frac{1}{a}\right|>1$ であるから，(1)の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a|^n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{a}\right|^n=+\infty$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}|a|^n=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} a^n=0$$　である．■

［注］　ベルヌイの不等式と同様にして証明できる不等式

$$h>0 \text{ ならば } (1+h)^n>\frac{1}{2}n(n-1)h^2 \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

を利用すると，本問と同様にして，

“$|a|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} na^n=0$”

を導くことができる．

B.111

ベルヌイの不等式

$h>0$　ならば　$(1+h)^n>1+nh$　$(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を利用して,

a が1より大の定数のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

であることを証明せよ.

アプローチ　指数関数の連続性を仮定すれば,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=a^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=a^0=1$$

と「証明」できますが,これでは少し不都合です.なぜなら指数関数の連続性を証明するために,通常,この極限値が利用されるので,論理の循環になってしまうからなのです.

解答　任意の $h>0$ に対してベルヌイの不等式より

$$1<1+nh<(1+h)^n.$$

各辺の n 乗根をとると

$$1<\sqrt[n]{1+nh}<1+h \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

が得られる.いま,

$$1+nh=a\quad とおくと\quad h=\frac{a-1}{n}>0$$

であるから,①が使えて

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\frac{a-1}{n} \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

ベルヌイの不等式 ▶ は $h>0$ であれば h が n による場合でも正しい.

a は定数であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$ であって,②の最右辺は最左辺の定数1に収束する.よって,はさみ打ちの原理により

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　である.■

[注]　$0<a<1$ の場合は,$\dfrac{1}{a}=b$ とおくと,$b>1$ であるから上で示した結論より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$ である.したがって,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1$$

となり,やはり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ となる.

B.112

次の各極限値を求めよ．

(1)　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\sin n$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}(n+\sin\sqrt{n})$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sin\sqrt{n}}{n+\sin\sqrt{n}}$

アプローチ　“はさみ打ちの原理”を用いる基本問題です．

解答　(1)　$-1\leqq\sin n\leqq1$　より

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n\sin n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

であり，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$.

よって，はさみ打ちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\sin n=\mathbf{0}.$$

◀ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\sin n$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
$\times\lim_{n\to\infty}\sin n$
$=0\times\lim_{n\to\infty}\sin n=0$
とするわけにはいかない！

(2)　$\sin\sqrt{n}\geqq-1$　より

$$n+\sin\sqrt{n}\geqq n-1$$

であり，しかも $\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}(n+\sin\sqrt{n})=\boldsymbol{\infty}.$$

◀ これも(1)と同様に lim を分配することはできない．

(3)　$-1\leqq\sin\sqrt{n}\leqq1$　より　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}\leqq\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n}\to0$ $(n\to\infty)$ ゆえ，はさみ打ちの原理により $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}=0$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sin\sqrt{n}}{n+\sin\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}}{1+\frac{1}{n}\sin\sqrt{n}}=\mathbf{1}.$$

◀ 分母・分子を n で割った．

［注］　(3)では，$-1\leqq\sin\sqrt{n}\leqq1$　から得られる2つの不等式

$$n-1\leqq n-\sin\sqrt{n}\leqq n+1$$
$$n-1\leqq n+\sin\sqrt{n}\leqq n+1$$

を組んで得られる不等式

$$\frac{n-1}{n+1}\leqq\frac{n-\sin\sqrt{n}}{n+\sin\sqrt{n}}\leqq\frac{n+1}{n-1}\quad(n\geqq2)$$

においてはさみ打ちの原理を用いてもよい．

B.113

a が正の定数のとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ であることを利用して

(1)　$0<x\leqq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ を求めよ.

(2)　$a>0$, $b>0$ のとき, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a, b\}$ を示せ.

ただし, $\max\{a, b\}$ とは a, b のうち小さくない方を表すものとする.

アプローチ　(1)において, $0<x<1$ なら $x^n\to 0$ だから $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$ とするのは, 論理的に誤りです(予想としては正しい). $\sqrt[n]{1+x^n}$ に含まれる2つある n のうち, x^n の n だけ先に ∞ とするわけにはゆかないからです. そこで, $\sqrt[n]{1+x^n}$ を1に収束する2つの数列ではさむ(評価する)ことを考えます.

解答　(1)　$0<x\leqq 1$ より　$1<1+x^n\leqq 2$

$$\therefore\quad 1<\sqrt[n]{1+x^n}\leqq\sqrt[n]{2}$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ であるから, 上式の最右辺は最左辺の定数1に収束する. よって,

はさみ打ちの原理 ▶

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=\mathbf{1}.$$

(2)　対称性により,

“$a\geqq b$ のとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$”

の成立を示せば十分である.

$a\geqq b>0$ のとき $x=\dfrac{b}{a}$ とおけば $0<x\leqq 1$ であり,

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}=a\cdot\sqrt[n]{1+x^n}$$

したがって, (1)の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=a\cdot 1=a.\quad ■$$

[注]　(2)では, 後に学ぶ対数(自然対数)を利用することも考えられる.

$P=\sqrt[n]{a^n+b^n}$　$(a\geqq b)$　とおくと,

$$\log P=\frac{1}{n}\log(a^n+b^n)$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right\}=\log a+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\log a$$

$y=\log x$ が単調な連続関数であることから $\lim_{n\to\infty}(\log P)=\log a$ より

$\therefore\quad \log(\lim_{n\to\infty}P)=\log a$　　$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P=a$　を得る.

B.114

次を証明せよ．

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$　　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$

アプローチ　$n\to\infty$ のとき，2^n も n も ∞ に発散しますが，(1)の結論は，2^n の発散速度が n のそれに比べて極めて大きいことを意味します．後に，関数の極限でもこの手の話を学びますが，証明はそれ程楽ではなく"はさみ打ちの原理"によります．

解答　(1)　2項定理により，$n\geqq 2$ では，

$$2^n=(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n$$
$$\geqq {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2$$
$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n(n-1)}{2}$$

が成り立つ．これより

$$0<\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n(n-1)}$$

◁ $a>b>0$ のとき $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

$$\therefore\quad 0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

◁ はさみ打ちの原理

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.\ ■$$

(2)　$a_n=\frac{3^n}{n!}$　とおくと　$a_{n+1}=\left(\frac{3}{n+1}\right)a_n$　である．

◁ 漸化式を作った．

そして，

$$n\geqq 3\quad なら\quad 0<\frac{3}{n+1}\leqq\frac{3}{4}$$

◁ $\frac{3}{4}$ が1より小さいことが後で効く．

であり，$a_n>0$ でもあるから

$$0<a_{n+1}\leqq\frac{3}{4}a_n\qquad(n\geqq 3)$$

が成立する．

したがって，$n\geqq 3$ のとき

$$0<a_n\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\cdot a_3=\frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}=0$　であるから，はさみ打ちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.\ ■$$

B.115

(1)　$a_n=\sum_{k=n+1}^{n+3}\frac{1}{k^2}$　に対し，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$　を示せ．

(2)　$b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}$　に対し，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$　を示せ．

アプローチ　(1)では　$a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}$　において，この各項（項数が n に依らない有限個）が 0 に収束するので　$\lim_{n\to\infty}a_n=0$　は自明です．しかし，(2)では

$b_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$　と項数が n 個なので各項が 0 に収束するからといって，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$　とするわけにはいきません．たとえば，$\frac{1}{n}\to 0$　$(n\to\infty)$　ですが，それが n 個あれば，$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}^{n\text{個}}\Bigr)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=\lim_{n\to\infty}1=1$　です．

そこで，(2)では，$0<b_n$　は明らかなので，

$$b_n<c_n,\quad \lim_{n\to\infty}c_n=0$$

を満たす c_n を見い出し，はさみ打ちの原理にもち込みます．

解答　**(1)**　略（上のアプローチのとおりである．）

(2)　$n+1\leqq k\leqq 2n$　に対しては　$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n^2}$　だから

$$b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n^2}=n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad 0<b_n<\frac{1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$　であるから，はさみ打ちの原理により

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$　である．■

▶
$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$$
$$\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{n^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+)\ \frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}$$
$$b_n<\frac{n}{n^2}$$

［注］　(2)では，B.126［注］と同じように，定積分を利用して数列和 b_n を評価することもできる．

B.116

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ とする．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n}\left(\left[\frac{k}{n}\right]-\frac{k}{n}-\left[\frac{k-1}{n}\right]+\frac{k-1}{n}\right)$ を求めよ．

アプローチ

$$\begin{cases} 1\leqq k<n \text{ のとき，} 0<\dfrac{k}{n}<1 & \therefore\ \left[\dfrac{k}{n}\right]=0 \\ n\leqq k<2n \text{ のとき，} 1\leqq\dfrac{k}{n}<2 & \therefore\ \left[\dfrac{k}{n}\right]=1 \\ k=2n \text{ のとき，} \dfrac{k}{n}=2 & \therefore\ \left[\dfrac{k}{n}\right]=2 \end{cases}$$

であることに注目して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}$ を分割します．

解答　$n\to\infty$ とするのだから n は十分大きな整数と考えてよい．

$$1\leqq k\leqq n-1 \quad \text{のとき} \quad \left[\frac{k}{n}\right]=\left[\frac{k-1}{n}\right]=0$$

$$k=n \quad \text{のとき} \quad \left[\frac{k}{n}\right]=1,\ \left[\frac{k-1}{n}\right]=0$$

$$n+1\leqq k\leqq 2n-1 \quad \text{のとき} \quad \left[\frac{k}{n}\right]=\left[\frac{k-1}{n}\right]=1$$

$$k=2n \quad \text{のとき} \quad \left[\frac{k}{n}\right]=2,\ \left[\frac{k-1}{n}\right]=1$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n}\left(\left[\frac{k}{n}\right]-\frac{k}{n}-\left[\frac{k-1}{n}\right]+\frac{k-1}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\left(-\frac{k}{n}+\frac{k-1}{n}\right)+\frac{n}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\\
&\qquad+\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}-1+\frac{k-1}{n}\right)+\frac{2n}{n}\cdot\left(2-\frac{2n}{n}-1+\frac{2n-1}{n}\right)\\
&=-\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{2n-1}k+2\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&=-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=n+1}^{2n-1}k\right)+3\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&=-\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k-n\right)+3\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&=-2\left(1-\frac{1}{n}\right)+3\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n}\left(\left[\frac{k}{n}\right]-\frac{k}{n}-\left[\frac{k-1}{n}\right]+\frac{k-1}{n}\right)=\mathbf{1}.$$

B.117

数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1=2$，および，漸化式

$c_{n+1}=\dfrac{2c_n+3}{c_n+2}$ $(n\geqq 1)$ によって定められるとする．

(1) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $\begin{cases} a_1=2 \\ b_1=1 \end{cases}$，$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+3b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=\ \ a_n+2b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$ $(n\geqq 1)$

によって定まる数列とすると，$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ ……③ となることを示せ．

(2) 上の $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$a_n+\sqrt{3}\,b_n$，$a_n-\sqrt{3}\,b_n$ を求めよ．

(3) $\{c_n\}$ の極限値を求めよ．

アプローチ (1)は厳密には数学的帰納法でしょう．(2)の導入に乗って連立漸化式①，②が処理できれば(3)は簡単でしょう．

解答 (1) まず，$c_1=\dfrac{a_1}{b_1}$ は成立している．

次に，ある正整数 n に対して③が成り立つと仮定する．

$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ を $\{c_n\}$ の漸化式の右辺に代入すると①，②より

$$c_{n+1}=\frac{2\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)+3}{\dfrac{a_n}{b_n}+2}=\frac{2a_n+3b_n}{a_n+2b_n}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

となり，n が1つ増しても③が成り立つことになる．

よって，任意の自然数 n に対して，③が成り立つ．■

(2) ①＋②×$\sqrt{3}$，①－②×$\sqrt{3}$ を作ると，

$$\begin{cases} a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2+\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3}\,b_n) \\ a_{n+1}-\sqrt{3}\,b_{n+1}=(2-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3}\,b_n) \end{cases}$$

が得られ，これが任意の自然数 n について成立することより，

$$\begin{cases} a_n+\sqrt{3}\,b_n=(2+\sqrt{3})^{n-1}(a_1+\sqrt{3}\,b_1)=\mathbf{(2+\sqrt{3})^n} & \cdots\cdots④ \\ a_n-\sqrt{3}\,b_n=(2-\sqrt{3})^{n-1}(a_1-\sqrt{3}\,b_1)=\mathbf{(2-\sqrt{3})^n} & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

を得る．

(3) ④±⑤から

$$\begin{cases} 2a_n=\alpha^n+\beta^n \\ 2\sqrt{3}\,b_n=\alpha^n-\beta^n \end{cases} \quad ただし \quad \begin{cases} \alpha=2+\sqrt{3} \\ \beta=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore\quad c_n=\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^n-\beta^n}=\sqrt{3}\cdot\frac{1+r^n}{1-r^n}$$

ここで，$r=\dfrac{\beta}{\alpha}$ であり，$0<r=(2-\sqrt{3})^2<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} c_n=\sqrt{3}.$$

［注］　1°　$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ の値を求めるには，c_n を n の式で表す必要はない．

《$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ を求めるための別の方法》

極限値が存在すると仮定して，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ とおくと，与えられた漸化式から，

$$\alpha=\frac{2\alpha+3}{\alpha+2}\qquad\therefore\quad \alpha^2=3\qquad\therefore\quad \alpha=\pm\sqrt{3}$$

となるが，$c_n>0$ であることを考慮すれば $\alpha=\sqrt{3}$ でなければならない．

そこで，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\sqrt{3}$ を証明する．

$$c_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{2c_n+3}{c_n+2}-\sqrt{3}=\frac{(2-\sqrt{3})c_n-\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{c_n+2}$$

$$\therefore\quad |c_{n+1}-\sqrt{3}|=\frac{2-\sqrt{3}}{c_n+2}\cdot|c_n-\sqrt{3}|$$

$$|c_{n+1}-\sqrt{3}|<\frac{2-\sqrt{3}}{2}|c_n-\sqrt{3}|$$

これが任意の n について成り立つので，

$$|c_n-\sqrt{3}|<\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}|c_1-\sqrt{3}|\qquad(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

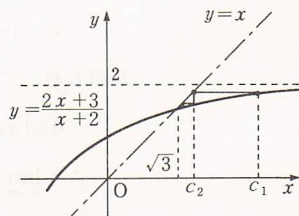
が導かれる．

$n\to\infty$ とすると $0<\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}<1$ より，

右辺→0 となるので，

$$\lim_{n\to\infty}|c_n-\sqrt{3}|=0$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} c_n=\sqrt{3}.$$

2°　グラフを利用すれば，$c_n\to\sqrt{3}$ となることは，直観的に了解できる．☞ A 1.7 Ⅱ，B. 118

B. 118

漸化式　$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$
によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

アプローチ　一般項を求めるのは困難ですが，極限値が存在するものとして，それを見つけるのは容易です．つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ であるとすると，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$ でもあるので，

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+2}\quad \text{より，}\quad \alpha=\sqrt{\alpha+2}\quad \text{が成り立ちます．}$$

これは，$\alpha^2=\alpha+2$　かつ　$\alpha\geqq 0$，すなわち　$\alpha=2$　と同値です．
したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するとすれば $\lim_{n\to\infty} a_n=2$ であることが分かりました．しかし，これだけでは極限値を求めたことにはなりません．そこで，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \iff \lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$$

という事実に基づいて，その予想が正しいことを証明するのです．(☞ A 1.7 Ⅰ)

推定する作業は**アプローチ**のとおり．▶

解答　$\lim_{n\to\infty} a_n=2$ ……(＊) であることを証明する．

与えられた漸化式の両辺から2を引くと，

$$a_{n+1}-2=\sqrt{a_n+2}-2$$

分子の有理化 ▶

$$=\frac{a_n-2}{\sqrt{a_n+2}+2}$$

ここで，$\sqrt{a_n+2}+2>2$ より　$\dfrac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}<\dfrac{1}{2}$

よって，

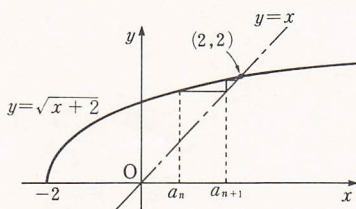
$$|a_{n+1}-2|=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}|a_n-2|<\frac{1}{2}|a_n-2|$$

$$\therefore\quad |a_{n+1}-2|<\frac{1}{2}|a_n-2|$$

が得られ，これが $n\geqq 1$ で成立することより，

$$0\leqq|a_n-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2| \longrightarrow 0\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0$$

したがって，(＊) が証明された．

［注］　本問は，前問同様“漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ で定まる数列の極限の求め方”の具体例である．さらに一般的な議論については，
☞ B. 362

B.119

つぎの各無限級数の和を求めよ．

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$　　(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\cdots\cdots$

(3) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\cdots$

アプローチ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和の定義は覚えていますか（☞ A 1.6）．

◀ $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ が無限級数の和の定義である．

解答 第 n 項までの和を S_n，無限級数の和を S で表すことにする．

(1) $S_1=1$，$S_2=1-\frac{1}{2}$，$S_3=1$，$S_4=1-\frac{1}{3}$，……

◀ $\{S_n\}$：$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \cdots$

一般に，　$S_{2m-1}=1$，$S_{2m}=1-\frac{1}{m+1}$

である．したがって，

$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty} S_{2m}=1$ となるので，$\lim_{n\to\infty} S_n=1$ である．

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty} S_n=\mathbf{1}.$$

(2) (1)と同様に，

$$S_{2m-1}=1,\quad S_{2m}=1-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{m+1}$$

である．したがって，

◀ $\{S_n\}$：$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \cdots$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m}=0\neq 1=\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}$$

であって，S_n は収束しない．ゆえに，**和はない．**

(3) 級数の第 k 項 $(k\geqq 2)$ は $\frac{k-1}{k}-\frac{k}{k+1}$ であるから，

◀ 第1項だけが例外．

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}-\frac{k}{k+1}\right)\quad(n\geqq 2)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty} S_n=\mathbf{0}.$$

［注］ (2)に“括弧”をつけると(3)になるが，(2)，(3)は別物である．一般に，無限級数では括弧の変更は許されない！なお(2)では，定理

「$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0 \Longrightarrow S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ は存在しない」 ☞ A 1.6 Ⅳ

を用いてもよい．

B.120

つぎの各無限級数の和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}$

アプローチ いずれも初項から第 n 項までの和（第 n 部分和）S_n を求め，$\lim_{n\to\infty}S_n$ を計算します．

解答 (1) 第 n 部分和を S_n とする．

$$第 k 項=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

と書き直せるので，S_n を作ると順次に打ち消しあって，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$$

よって，和は $\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{1}$ である．

(2) 第 k 項$=\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ であるから，

第 n 部分和 S_n を作ると，1 つおきに消し合うので

▷
$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ \vdots\\ \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\\ +)\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\\ \hline \end{array}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\ (n\to\infty)$$

よって，和は $\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ である．

(3) 第 k 項$=\dfrac{k}{(k+1)!}$

$$=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\}$$

$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$$

よって，和は $\lim_{n\to\infty}S_n=\mathbf{1}$ である．

B.121

つぎの各無限級数の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^{n+1}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a^{2k-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a(1-a^2)^{n-1}$　　((2)(3)では a は k, n によらない定数)

アプローチ 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ が収束するのは,

$a=0$　または　$-1<r<1$　のときです.

解答 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{25}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

これは, 初項$=-\dfrac{3}{25}$, 公比$=-\dfrac{3}{5}$ の無限等比級数で,

$\left|-\dfrac{3}{5}\right|<1$ より和が存在し

$$和=\left(-\frac{3}{25}\right)\cdot\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)\right\}^{-1}=\mathbf{-\frac{3}{40}}.$$

◀ $|r|<1$ なら $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}a(a^2)^{k-1}$

これは, 初項$=a$, 公比$=a^2$ の無限等比級数であるから,

$$\begin{cases}|\boldsymbol{a}|<1 \text{ のとき, 和}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2}.\\ |\boldsymbol{a}|\geqq 1 \text{ のとき, 和は存在しない.}\end{cases}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a(1-a^2)^{n-1}$ は初項 a, 公比 $1-a^2$ の無限等比級数である.

(i) 初項 $a\neq 0$ のとき,

公比 $|1-a^2|<1$ となるのは $0<a^2<2$

∴　$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ かつ $a\neq 0$ のときで, このとき

$$和=\frac{a}{1-(1-a^2)}=\frac{1}{a}.$$

(ii) $a=0$ のとき, 級数の各項はすべて 0 なので

和$=0$.

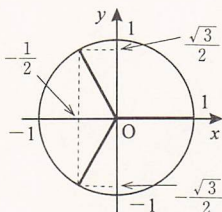
◀ 初項$=0$ のときは別扱いが必要.

以上まとめて,

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=0 \text{ のとき, 和}=0.\\ -\sqrt{2}<\boldsymbol{a}<0 \text{ または } 0<\boldsymbol{a}<\sqrt{2} \text{ のとき, 和}=\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}.\\ |\boldsymbol{a}|\geqq\sqrt{2} \text{ のとき, 和は存在しない.}\end{cases}$$

B.122

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\frac{2n\pi}{3}$ を求めよ．

アプローチ　この級数自身は等比級数ではないのですが，具体的に書き並べてみると，等比級数に帰着できることが分かります．

解答　関数 $\sin x$ は，周期 2π の周期関数であるので，

$\sin\frac{2n\pi}{3}$ は3を周期として循環し，その値は次のようになる．

$$\sin\frac{2n\pi}{3}=\begin{cases}\sqrt{3}/2 & (n=3k+1)\\ -\sqrt{3}/2 & (n=3k+2)\\ 0 & (n=3k+3)\end{cases}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

したがって，初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$S_{3m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2^3}\cdot 0+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2^5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2^6}\cdot 0+\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{2^{3m-2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2^{3m-1}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2^{3m}}\cdot 0$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3m-2}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3m-2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)^{m-1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2^3}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{2^3}}\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}\ (m\to\infty)$$

$$\therefore\quad \lim_{m\to\infty}S_{3m}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

一方，$S_{3m+1}=S_{3m}+\frac{1}{2^{3m+1}}\sin\frac{2(3m+1)\pi}{3}=S_{3m}+\frac{1}{2^{3m+1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

において，$m\to\infty$ とすると，$\frac{1}{2^{3m+1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\longrightarrow 0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty}S_{3m+1}=\lim_{m\to\infty}S_{3m}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

同様にして，$\lim_{m\to\infty}S_{3m+2}=\frac{\sqrt{3}}{7}$ がいえるので，

$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$
$\Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty}S_{3m}$
$=\lim_{m\to\infty}S_{3m+1}$
$=\lim_{m\to\infty}S_{3m+2}$
$=\alpha$

▶　$\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{7}}$ である．

B.123

$|x|<1$ のとき，無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots$$

の和を求めよ．必要なら「$|x|<1$ ならば $\lim_{n\to\infty} nx^n=0$」を用いてよい．

アプローチ まず部分和を求め，その極限を考察するという姿勢に変わりはありません．

解答 この級数の第 n 部分和を S_n とすると

$$\begin{array}{rl} & S_n=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1} \\ -)\ \therefore & xS_n=\quad x+2x^2+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \\ \hline & (1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}\quad -nx^n \end{array}$$

◀ この技巧は，等比級数の和の公式を導くのと全く同一．

$$\therefore\quad (1-x)S_n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

◀ $x\leqq -1$，$x>1$ の場合にも①は正しい．

ここで，$|x|<1$ より $\lim_{n\to\infty} x^n=0$，$\lim_{n\to\infty} nx^n=0$ であるから，

◀ B. 110 の [注]

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=\lim_{n\to\infty} S_n=\boldsymbol{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

[注]　1°　$|x|\geqq 1$ のときは，一般項 nx^{n-1} が $n\to\infty$ のとき 0 に収束しないので，級数は収束しない．

2°　部分和 S_n を求めるには，

$$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\quad (x\neq 1)$$

の両辺を x について微分すると，左辺はちょうど S_n，右辺は①の右辺となる(確かめよ)としてもよい．

ただし，この方法を $n\to\infty$ の場合に「拡張」して

$$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}\quad (-1<x<1)$$

の両辺を x で微分すれば，

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

が得られる，といいたいところだが，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d}{dx}f_n(x)\right\}=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\qquad \text{＜項別微分＞}$$

という関係が無条件には成立しないので，そのような推論は，論理的には不十分である．

B.124

i を虚数単位として

$$\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n=a_n+ib_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定められる実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考察する．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} のそれぞれを a_n，b_n で表せ．

(2) $a_n{}^2+b_n{}^2$ を n の式で表し，これを利用して $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ を示せ．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ を求めよ．

解答 (1)

$$a_{n+1}+ib_{n+1}=\left(\frac{1+2i}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{1+2i}{3}\right)\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1+2i}{3}\right)(a_n+ib_n)$$

$$=\frac{a_n-2b_n}{3}+i\cdot\frac{2a_n+b_n}{3}$$

▷ $\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n\left(\frac{1+2i}{3}\right)$ と考えてもよい．

▷ $i^2=-1$

両辺の実部，虚部を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{a_n-2b_n}{3},\quad b_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}}\quad を得る．$$

(2) 上の結果より

$$a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2=\frac{1}{9}\{(a_n-2b_n)^2+(2a_n+b_n)^2\}=\frac{5}{9}(a_n{}^2+b_n{}^2)$$

$$\therefore\quad a_n{}^2+b_n{}^2=\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\cdot(a_1{}^2+b_1{}^2)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)=0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0.\quad ■$$

▷ a_n，b_n が実数という条件が効いている．

(3) 見やすくするために $(1+2i)/3=c$ と書くと，

$$a_n+ib_n=c^n$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{N}a_n+i\sum_{n=1}^{N}b_n=\sum_{n=1}^{N}(a_n+ib_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}c^n=c\cdot\frac{1-c^N}{1-c}$$

$$=\frac{-1+3i}{4}-\left(\frac{-1+3i}{4}\right)(a_N+ib_N)$$

▷ 初項，公比が虚数であっても，等比数列の和の公式は使える．

▷ $c=\frac{1+2i}{3}$ を代入した．

両辺の実部と虚部を比較して

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a_N+\frac{3}{4}b_N,\quad \sum_{n=1}^{N}b_n=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}a_N+\frac{1}{4}b_N.$$

ここで，$N\to\infty$ とすれば，$a_N\to0$，$b_N\to0$ であるから，

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\boldsymbol{-\frac{1}{4}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\boldsymbol{\frac{3}{4}}.$$

B.125

$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ $(N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく．$\lim_{N\to\infty}S_N=S$ の存在を既知として，以下の問に答えよ．

(1)　$n\geqq 1$ のとき，$n(n-1)<n^2<n(n+1)$ となることを利用して

$$S_N+\frac{1}{N+1}<S<S_N+\frac{1}{N}$$ を示せ．

(2)　$\frac{58}{36}<S<\frac{61}{36}$ であることを示せ．

アプローチ　高校数学の範囲で一般的に扱える無限級数は，等比級数だけです．第N部分和 S_N をNの簡単な式で表すことができない本問のような級数については，級数の項 $\frac{1}{n^2}$ を，第N部分和を容易に求めることのできる級数の項で，はさむ(近似する)ことにより，級数の和のおおよその値を知ることが議論の対象となります．このような作業を，**評価** といいます．

解答　(1)　$S-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ であるから，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<S-S_N<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

を示せばよい．ここで

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{N+1}\\ \displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N}\end{cases}$$

であるから

$$S_N+\frac{1}{N+1}<S<S_N+\frac{1}{N}.$$ ■

(2)　(1)で得た結果に $N=3$ を代入すると，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}<S<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \frac{58}{36}<S<\frac{61}{36}$$ を得る．

参考　数列 $\{S_n\}$ は，上に有界な単調増加列であるから，極限値Sはたしかに存在し，$S=\frac{\pi^2}{6}=\frac{59.2\cdots}{36}$ である．

B.126

$S_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく．

(1) $2(\sqrt{N+1}-1)<S_N<2\sqrt{N}$ を示せ．

(2) $\lim_{N\to\infty}\frac{S_N}{\sqrt{N}}$ を求めよ．

アプローチ 前問同様，S_N を N の式で表すのは無理です．

解答 (1) $k\geqq 1$ とすると，

$$\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}{2}<\sqrt{k}<\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}$$

$$\therefore\ \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$\therefore\ 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\quad\cdots\cdots(*)$$

であるから，各辺に，$\sum_{k=1}^{N}$ をとると，

▷ $(*)$ において $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N$ とおいた式を加えあわせること．

$$2\sum_{k=1}^{N}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sum_{k=1}^{N}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

$$\therefore\ 2(\sqrt{N+1}-1)<S_N<2\sqrt{N}$$ を得る．■

(2) 上で得た不等式の各辺を $\sqrt{N}$ で割ると

$$2\frac{\sqrt{N+1}-1}{\sqrt{N}}<\frac{S_N}{\sqrt{N}}<2$$

となるが，ここで最左辺は，$N\to\infty$ のとき

$$\lim_{N\to\infty}2\frac{\sqrt{N+1}-1}{\sqrt{N}}=\lim_{N\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{N}}-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)=2$$

となるので，

$$\therefore\ \lim_{N\to\infty}\frac{S_N}{\sqrt{N}}=\mathbf{2}.$$

［注］ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ の単調減少性から，$\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ が成り立つ．(グラフを考えてみよ！) この積分を実行しても，$(*)$ が得られる．

また，$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N}{\sqrt{N}}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{N}}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1=2$

のように直接，結果を導くこともできる．

B.127

2つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ がそれぞれ和 A, B をもつとき，つぎの問に答えよ．ただし，$a_1=1$ とする．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n+a_{n+1})$ を A, B で表せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} n^2a_n=0$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_n-a_{n+1})$ を A, B で表せ．

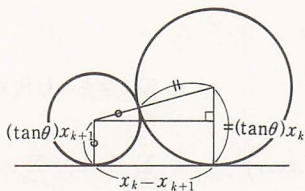
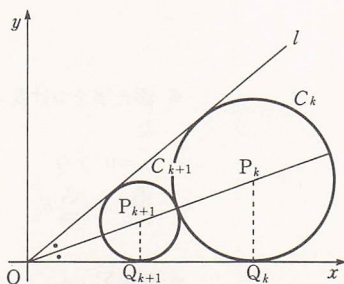
アプローチ 級数和についての，抽象的な取り扱いの問題です．「$n\to\infty$ のときは，$a_n=a_{n+1}$ だから $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty} 2na_n$」などとするのは，気楽すぎます．

解答 (1)
$$\sum_{n=1}^{N} n(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{N} na_n+\sum_{n=1}^{N} na_{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{N} na_n+\sum_{n=2}^{N+1}(n-1)a_n$$
◀ 添え字をつけ変えた
$$=\sum_{n=1}^{N} na_n+\sum_{n=1}^{N+1}(n-1)a_n$$
◀ $b_1=0$ なら $\sum_{n=2}^{N} b_n=\sum_{n=1}^{N} b_n$
$$=\sum_{n=1}^{N} na_n+\sum_{n=1}^{N+1} na_n-\sum_{n=1}^{N+1} a_n$$
$$\longrightarrow \mathbf{2B-A}.\ (N\to\infty)$$
◀ $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N+1} na_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} na_n=B$

(2)
$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_n-\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2a_n-\sum_{n=2}^{N+1}n^2a_n$$
◀ 添え字をつけ代えた
$$=(1+1)^2\cdot a_1+\sum_{n=2}^{N}(n+1)^2a_n-\left(\sum_{n=2}^{N}n^2a_n+(N+1)^2a_{N+1}\right)$$
◀ $\sum_{n=1}^{N} a_n=a_1+\sum_{n=2}^{N} a_n$, $\sum_{n=2}^{N+1} a_n=\sum_{n=2}^{N} a_n+a_{N+1}$
$$=4a_1+\sum_{n=2}^{N}\{(n+1)^2a_n-n^2a_n\}-(N+1)^2a_{N+1}$$
$$=4a_1+\sum_{n=2}^{N}(2na_n+a_n)-(N+1)^2a_{N+1}$$
$$=2\sum_{n=1}^{N}na_n+\sum_{n=1}^{N}a_n+a_1-(N+1)^2a_{N+1}$$
◀ $\lim_{N\to\infty}(N+1)^2a_{N+1}=0$
$$\longrightarrow \mathbf{2B+A+1}.\ (N\to\infty)$$

B.128

xy 平面に直線 l：$y=(\tan 2\theta)x$ がある．(ただし，$0<\theta<\pi/4$)
点(1，0)を通り x 軸と l に接する円を C_1，C_1 の左側にあって l と x 軸と C_1 に接する円を C_2，C_2 の左側にあって l と x 軸と C_2 に接する円を C_3，以下同様に，C_k の左側にあって l と x 軸と C_k に接する円を C_{k+1} とする．円 C_k の面積を S_k とするとき，$\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．

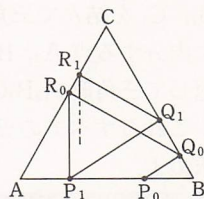
アプローチ 円 C_k と円 C_{k+1} の関係を調べるというのがこの手の問題の手筋です．

解答 円 C_k の中心を $P_k(x_k,\ y_k)$，円 C_k と x 軸との接点を $Q_k(x_k,\ 0)$ とおく．$(k\geqq 1)$

C_k が x 軸と l に接することから，中心 P_k は，x 軸と l のなす角を二等分する直線
$y=(\tan\theta)x$ 上にあるから，
$$y_k=(\tan\theta)x_k$$
であり，これが，円 C_k の半径の大きさでもある．

2円 C_k，C_{k+1} が外接するための条件は，
(中心間の距離)＝(2円の半径の和)
となることであるから
$$\frac{x_k-x_{k+1}}{\cos\theta}=(\tan\theta)(x_k+x_{k+1})$$
$$\therefore\quad (1+\sin\theta)x_{k+1}=(1-\sin\theta)x_k$$
$$\therefore\quad x_{k+1}=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}x_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$
が成りたつ．これと，$x_1=1$ より
$$x_k=\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{k-1}x_1=\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^{k-1}$$
を得る．したがって，$R=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ とおけば
$$S_k=\pi y_k{}^2=\pi\cdot\tan^2\theta\cdot x_k{}^2=\pi\tan^2\theta\cdot R^{2k-2}$$
公比 R^2 の等比数列 ▶

となるが，$0<\sin\theta<1$ であるから
$$0<R=-1+\frac{2}{1+\sin\theta}<1$$
$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{\infty} S_k=\frac{S_1}{1-R^2}=\boldsymbol{\pi\tan^2\theta\cdot\frac{(1+\sin\theta)^2}{4\sin\theta}}.$$

B.129

正三角形 ABC において辺 AB 上に 1 点 P_0 が与えられている．P_0 より BC に垂線を引きその足を Q_0，Q_0 より CA に垂線を引きその足を R_0，R_0 より AB に垂線を引きその足を P_1 とする．つぎに，P_0 から P_1 を定めたのと同じ方法で，P_1 から P_2 を定め，P_2 から P_3 を定め，以下同様にして順次に P_4，P_5，…… を定める．n が限りなく大きくなるときの点 P_n の限りなく近づく位置を求めよ．

アプローチ P_n から出発し，Q_n，R_n，P_{n+1} と追って，P_{n+1} が P_n からどう定まるかの規則を定式化することを考えます．

解答 正三角形の 1 辺の長さを a とし，　◀ $a=1$ としてもよい．

$$P_nB=p_n,\ Q_nC=q_n,\ R_nA=r_n \quad \cdots\cdots ①$$

◀ p_n は P_n の位置を定める変数である．q_n，r_n も同様．

とおく．したがって，

$$AP_n=a-p_n,\ BQ_n=a-q_n,\ CR_n=a-r_n \quad \cdots\cdots ②$$

である．

P_n から Q_n，R_n，P_{n+1} と作っていく規則から，

$$\left.\begin{array}{l} P_nB\cos 60^\circ=BQ_n \\ Q_nC\cos 60^\circ=CR_n \\ R_nA\cos 60^\circ=AP_{n+1} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots ③$$

①，②を③に代入すると，

$$\begin{cases} p_n=2(a-q_n) & \cdots\cdots ④ \\ q_n=2(a-r_n) & \cdots\cdots ⑤ \\ r_n=2(a-p_{n+1}) & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

となる．④，⑤，⑥から q_n と r_n を消去すると

$$p_n=2(3a-4p_{n+1})$$

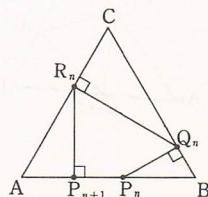
$$\therefore\ 8p_{n+1}=-p_n+6a$$

$$\therefore\ p_{n+1}-\frac{2a}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{2a}{3}\right)$$

これが任意の $n(\geqq 0)$ について成りたつことから

$$p_n-\frac{2a}{3}=\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(p_0-\frac{2a}{3}\right)$$

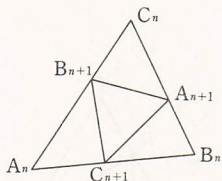
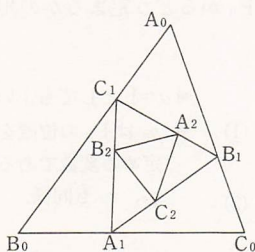
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^n=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{2a}{3}$ となる．

よって，点 P_n は **辺 AB を 1：2 に内分する点** に限りなく近づく．

◀ P_n の極限点は，出発点 P_0 の位置によらない！

B.130

p，q を正の定数とする．三角形 $A_0B_0C_0$ の各辺を $p:q$ に内分する点 A_1，B_1，C_1 を結んで三角形 $A_1B_1C_1$ を作り，つぎに三角形 $A_1B_1C_1$ の各辺を $p:q$ に内分する点 A_2，B_2，C_2 を結んで三角形 $A_2B_2C_2$ を作る．順次この方法をくり返して三角形 $A_3B_3C_3$，…… を作る．

これらすべての三角形の面積の総和が最も小さくなるときの $p:q$ の値を求めよ．

アプローチ $\triangle A_nB_nC_n$ と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ との関係に注目します．

解答 $\triangle A_nB_nC_n$ と $\triangle A_nC_{n+1}B_{n+1}$ は，$\angle A_n$ を共有しており

$$\frac{A_nC_{n+1}}{A_nB_n}=\frac{p}{p+q},\quad \frac{A_nB_{n+1}}{A_nC_n}=\frac{q}{p+q}$$

であるから，

$$\frac{\triangle A_nC_{n+1}B_{n+1}}{\triangle A_nB_nC_n}=\frac{pq}{(p+q)^2}$$

同様に

$$\frac{\triangle B_nA_{n+1}C_{n+1}}{\triangle A_nB_nC_n}=\frac{\triangle C_nB_{n+1}A_{n+1}}{\triangle A_nB_nC_n}=\frac{pq}{(p+q)^2}$$

したがって，

$$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}=\left(1-\frac{3pq}{(p+q)^2}\right)\triangle A_nB_nC_n$$

そこで，$1-\dfrac{3pq}{(p+q)^2}=r$，$\triangle A_nB_nC_n=S_n$　$(n\geqq 0)$

とおくと，$\{S_n\}$ は公比 r の等比数列をなしており，

$r=1-\dfrac{3pq}{(p+q)^2}$ は，$0<r<1$ を満たすので，

面積の総和は，

$$S=\frac{S_0}{1-r}=\frac{(p+q)^2}{3pq}\cdot S_0.$$

そして，

相加・相乗平均の不等式 ▶

$$\begin{cases}\dfrac{(p+q)^2}{pq}=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}+2\geqq 2\sqrt{\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{q}{p}}+2=4\\ \text{等号は } \dfrac{p}{q}=\dfrac{q}{p}\text{，すなわち } p=q \text{ のときに成り立つ}\end{cases}$$

となることから，S が最小となるのは

$p:q=\mathbf{1:1}$　のときである．

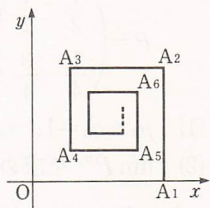
B.131

r は1より小さい正数とする．

右図のように，動点Pが原点Oから x 軸に沿って A_1 まで1進み，次に左に直角に曲がって A_2 まで r 進み，さらに左に直角に曲がって A_3 まで r^2 進み，……と動いてゆく．すなわち，動点Pは $A_0=O$ として

$$\angle A_nA_{n+1}A_{n+2}=90°,\ A_nA_{n+1}=r^n$$

となるように反時計まわりの道に沿って進む．

動点Pはどんな点に限りなく近づくか．

アプローチ　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ と具体的に A_n の座標を調べてゆきます．

解答　A_n の座標を $A_n(x_n,\ y_n)$ とおくと，

$$x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=1-r^2,\ x_5=x_6=1-r^2+r^4,\ \cdots\cdots$$

一般に，

$$x_{2m+1}=x_{2m+2}=1-r^2+r^4-\cdots\cdots+(-1)^m r^{2m}\quad \text{となる．}$$

右辺は，初項1，公比 $-r^2$ の等比級数で，|公比|<1 であるから，　◀ $0<r<1$

無限等比級数の和として

$$\lim_{m\to\infty}x_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}x_{2m+2}=\frac{1}{1-(-r^2)}=\frac{1}{1+r^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1+r^2}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

同様にして，$y_1=0,\ y_2=y_3=r,\ y_4=y_5=r-r^3,\ \cdots\cdots$

$$y_{2m}=y_{2m+1}=r-r^3+r^5-\cdots\cdots+(-1)^{m-1}r^{2m-1}$$

よって，初項 r，公比 $-r^2$ の無限等比級数の和として

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{r}{1+r^2}\quad\cdots\cdots\text{②}$$

①，②より　動点Pは定点 $Q\left(\dfrac{1}{1+r^2},\ \dfrac{r}{1+r^2}\right)$ に限りなく近づく．

[注]　複素数平面を考えて，点 A_k を表す複素数を Z_k，$\alpha=r(\cos 90°+i\sin 90°)$ とおくと，

$$Z_{k+2}-Z_{k+1}=\alpha(Z_{k+1}-Z_k)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つので，これより，

$$Z_{k+1}-Z_k=\alpha^k(Z_1-Z_0)\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を得る．ここで $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\ (n\geqq 1)$ とおき辺々足し合わせると，

$$Z_n-Z_0=(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})(Z_1-Z_0)$$

$$\therefore\quad Z_n=Z_0+\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(Z_1-Z_0)$$　となり，Z_n，つまり A_n の座標が求められる．

B.132

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ のとき，正整数 n に対し $P^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とする．

(1) $p_n+q_n=1$，$r_n+s_n=1$ を示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} P^n$ を求めよ．ここに，行列の列 $\{X_n\}$ と定行列 A に対し $\lim_{n\to\infty} X_n=A$ とは，X_n の要素のそれぞれが対応する A の要素に収束することである．

$P^{n+1}=PP^n$ でもあるがこの式からは(1)を解くのに有用な関係式は得づらい．

▶ **解答** (1) $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ r_{n+1} & s_{n+1} \end{pmatrix}=P^{n+1}=P^nP=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

より

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n \quad \cdots\cdots ①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{4}q_n \quad \cdots\cdots ②$$

①＋② より　$p_{n+1}+q_{n+1}=p_n+q_n \quad (n\geqq 1)$

これより $\{p_n+q_n\}$ は定数数列であって

$$p_n+q_n=p_1+q_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1. \quad \cdots\cdots ③$$

r_n+s_n についても同様である．■

(2) ③より $q_n=1-p_n$ であるので，これを①に代入して q_n を消去すれば，

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{3}\right) \quad (n\geqq 1)$$

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{3}\right) \quad \therefore\quad \lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ④$$

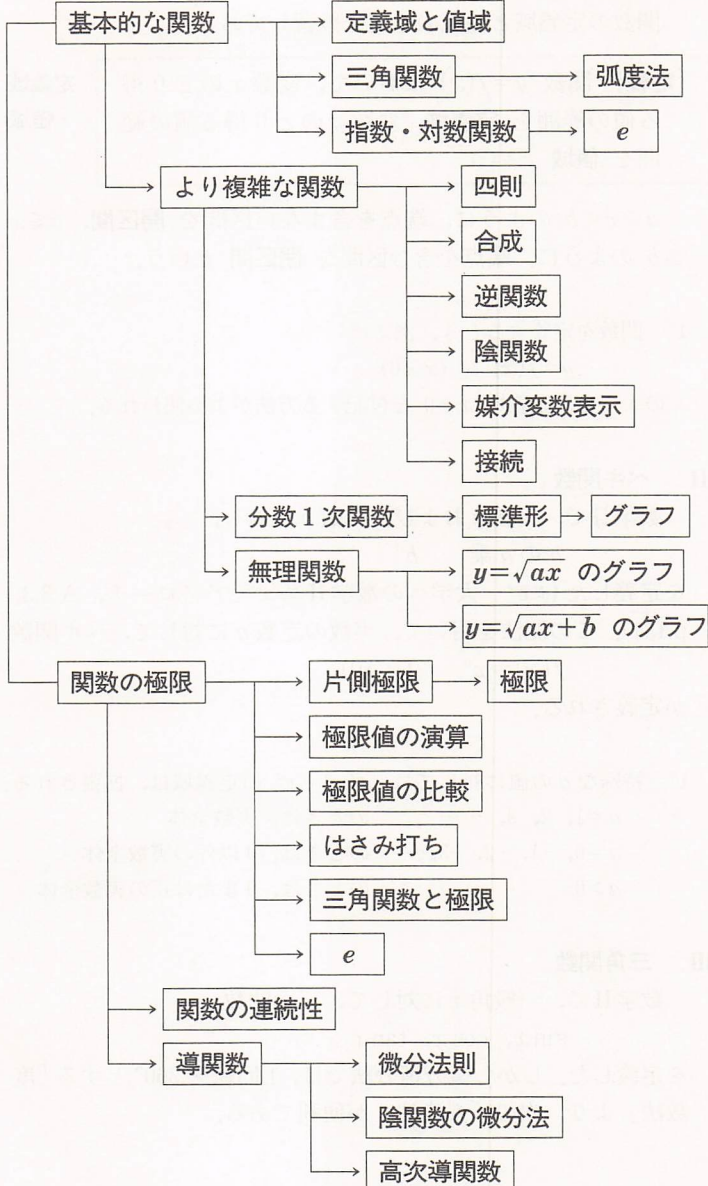
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} q_n=\lim_{n\to\infty}(1-p_n)=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ⑤$$

r_n，s_n についても同様にして，

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ⑥$$

となる．④，⑤，⑥より　$\lim_{n\to\infty} P^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ である．

§2 関数とその微分

□ キー・ワード (A基礎理論篇)

A 2.1 基本的な関数

I．定義域と値域

関数の定義域と値域の定義を復習しておく．

> **[定義]** 関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとり得る値の範囲を **定義域**，変数 y のとり得る値の範囲を **値域** という．

定義域・値域

$a<x<b$ のように，端点を含まない区間を **開区間**，$a\leqq x\leqq b$ のように，端点を含む区間を **閉区間** という．

1° 関数を定義するとき，例えば

$$y=f(x) \qquad (x\geqq 0)$$

のように，定義域 $x\geqq 0$ を付記する方法がよく使われる．

II．ベキ関数

数学IIで，実数 a および正の数 b に対し，

$$b\text{ の }a\text{ 乗} \qquad b^a$$

を定義した（☞ 大学への数学IIニューアプローチ，A 3.3，p.131）．この記法を用いて，実数の定数 a に対して，ベキ関数

$$f(x)=x^a \qquad (x>0)$$

が定義される．

1° 特殊な a の値に対しては，$f(x)=x^a$ の定義域は，拡張される．

$a=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のときは，実数全体
$a=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots$ のときは，0 以外の実数全体
$a>0$ のときは，0 または正の実数全体

III．三角関数

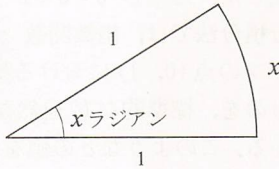
数学IIで，一般角 x に対して，三角関数

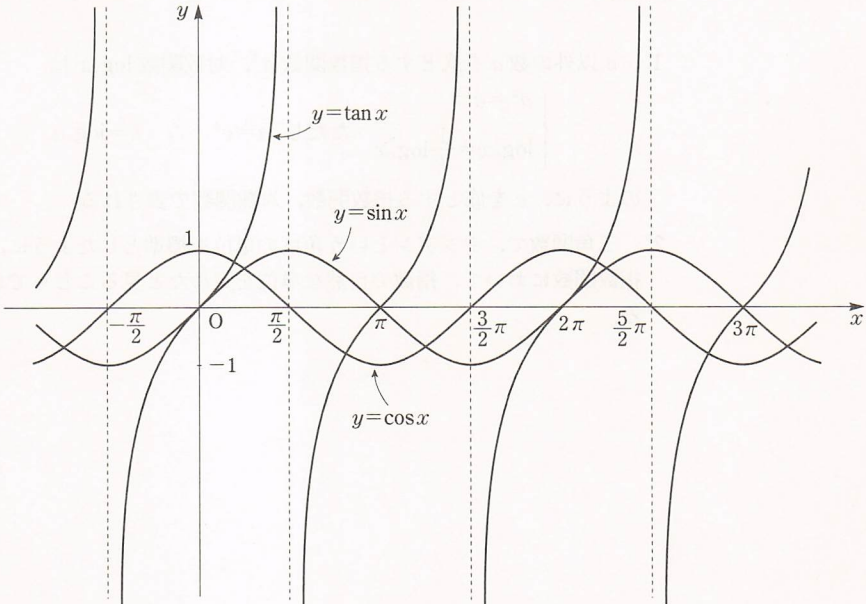
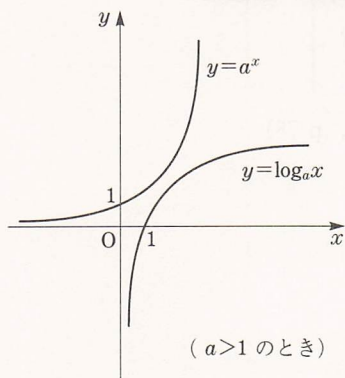
$$\sin x,\ \cos x,\ \tan x$$

を定義した．しかし微分積分法では，1 回転を 360° とする「度数法」より，次の「弧度法」が便利である．

弧度法

> ［定義］ 半径1の扇形の弧の長さが x であるとき，その扇形の中心角を x ラジアン(radian)という．

(☞ 大学への数学IIニューアプローチ，A 2.1，p.78)

1°　例　$90° = \frac{\pi}{2}$，$180° = \pi$，$360° = 2\pi$　(ラジアン)

弧度法を用いると，$y = \sin x$ のグラフの原点における接線の傾きは1になる．(☞ A 2.7 II)

Ⅳ．指数関数，対数関数

数学IIで，a を底とする指数関数

$$f(x)=a^x \quad (x \text{ は任意の実数})$$

と，a を底とする対数関数

$$g(x)=\log_a x \quad (x>0)$$

を定義した．ただし $0<a\neq 1$ である．

微分積分法では，指数関数 $y=a^x$ のうち，そのグラフの点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが1となるものを，標準的な（“自然な”）指数関数として用いる．このような a の値を e と書く．e の値は

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281828459045\cdots\cdots$$

で与えられる．（☞ A 2.5 Ⅶ，A 2.7 II）

また e を底とする対数関数 $y=\log_e x$ のグラフの点 $(1,\ 0)$ における接線の傾きも1となる．（☞ A 2.7 II） $\log_e x$ を **自然対数** という．今後 e を略し，$\log_e x=\log x$ と書く．

1°　e 以外の数 a を底とする指数関数 a^x，対数関数 $\log_a x$ は，

$$\begin{cases} a^x=e^{kx} \\ \log_a x=\dfrac{1}{k}\log_e x \end{cases} \quad \text{ただし } a=e^k \quad \therefore \quad k=\log_e a$$

のように，e を底とする指数関数，対数関数で表される．

2°　三角関数で，ラジアンという角度の単位を標準としたように，指数関数において，指数の自然な単位を定めたと見ることもできる．

A 2.2 より複雑な関数の構成

ベキ関数，三角関数，指数関数，対数関数のような基本的な関数を組合せて，複雑な関数を作る手続きを考えよう．

I．四　則

関数 $f(x)$，$g(x)$ に対し，それらの共通の定義域において

線形結合　$af(x)+bg(x)$　　(a，b は定数)

積　　　　$f(x)g(x)$

を考えることができる．また共通の定義域の $g(x)\neq 0$ なる範囲において

商　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$

を考えることができる．

1°　例　ベキ関数 1，x，x^2，x^3，……，x^n の線形結合

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n$$

を n 次関数（n 次多項式）といい，それらの商

$$g(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots+b_mx^m}$$

を有理関数（有理式）という．

II．合成関数

2つの関数

$$\begin{cases} y=f(x) \\ z=g(y) \end{cases}$$

を用いて定義される関数

$$z=g(f(x))$$

を g と f の合成関数という．

合成関数は，$f(x)$ の値が g の定義域に属するような x の範囲で定義される．

1°　$g(f(x))=g\circ f(x)$ と書くこともある．

2°　例　$y=f(x)=kx$，$z=g(y)=e^y$　とすると，

$$z=g(f(x))=e^{kx}$$

III．逆関数

> [定義]　関数 $f(x)$ の値域に属するどの数 y に対しても，
>
> $$y=f(x)$$
>
> なる x がただ1つに定まるとき，その x を
>
> $$x=f^{-1}(y)$$
>
> と書き，f^{-1} を f の逆関数という。

逆関数

1°　例　$f(x)=x^2$　$(x\geqq 0)$ とする．$y\geqq 0$ に対し

$$y=x^2 \iff x=\sqrt{y}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(y)=\sqrt{y}$$

2°　$g(x)=x^2$ (x は任意の実数) は，逆関数をもたない．

3°　逆関数 f^{-1} の定義域は，関数 f の値域に一致する．

4°　例　p を正の実数として，$f(x)=x^p$　$(x\geqq 0)$ を考える．$y\geqq 0$ に対し

$$y=x^p \iff x=y^{\frac{1}{p}}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p}}$$

例　$f(x)=e^x$ に対し，

$$y=e^x \iff x=\log y$$

$$\therefore\quad f^{-1}(y)=\log y$$

IV．陰関数

たとえば $x^2-y^3=0$ のように，x，y を含む等式 $F(x,y)=0$ が与えられた場合，一般に，x の値を指定すると，この等式からそれに対応する y の値が定まり，y が x の関数となる．このような方法で x の関数を表すことを **陰関数** [implicit function] 表示といい，$F(x,y)=0$ を x の関数 y を与える方程式とよぶ．

1°　陰関数表示 $F(x,y)=0$ を y について解いて $y=f(x)$ の形に表すこと，すなわち，**陽関数** [explicit function] 表示に書き直すことがたやすい場合もある．

例　陰関数表示 $x^2-y^3=0$ で定められる x の関数 y の陽関数表示は $y=\sqrt[3]{x^2}$ にほかならない．

2°　$F(x,\ y)=0$ を y について解くのが困難あるいは不適当である

場合もしばしばある．たとえば，$x^2+y^2=1$ で定められる x の関数 y は $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ となり，一般に x の1つの値に対し y の2つの値が対応する．

このように，変数 x の1つの値に対して y の2つ以上の値が対応する関数のことを **多価関数** [multi-valued function] といい，これに反して，x の1つの値に対してつねに y の値が1つ対応する関数を **1価関数** [single-valued function] という．

(関数を写像と同義語として扱う現代化数学教育の立場に固執すれば，多価関数といった情感豊かな用語は消去されてしまう．)

V．媒介変数表示

ある区間 I で定義された関数 $f(t)$，$g(t)$ を用いて

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad (t\in I) \qquad \begin{matrix}\cdots\cdots\text{①} \\ \cdots\cdots\text{②}\end{matrix}$$

とおく．もしも f が逆関数 f^{-1} をもつならば，①より

$$t=f^{-1}(x)$$

$$\therefore\quad y=g(f^{-1}(x))$$

すなわち，y は x の関数となる．

1°　例　$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

は，関数 $y=\sqrt{1-x^2}$　$(-1\leqq x\leqq 1)$ を定める．

2°　f が逆関数をもたないとき，例えば

$$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

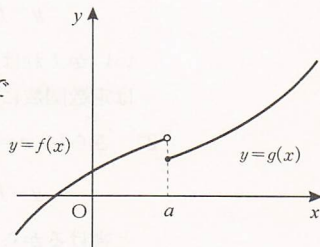
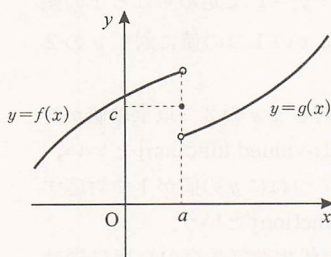
は，通常の意味での関数を定めない．しかしこれは，陰関数表示 $x^2+y^2=1$ と等価な表現と見なすことができる．(☞ A 7.5)

3°　$(f(t), g(t))$ を時刻 t における動点の座標と見れば，①，②は，その点が描く軌道(軌跡)を表現している．

VI．接　　続

2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の定義域を $x=a$ でつないで，

$$y=\begin{cases} f(x) & x<a \\ g(x) & x\geqq a \end{cases}$$

という新しい関数を作ることができる．

1°　つぎのようなつなぎ方もある．

$$y=\begin{cases} f(x) & x<a \\ c & x=a \\ g(x) & x>a \end{cases}$$

2°　$y=|x|$ は，関数

$$y=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geqq 0 \end{cases}$$

の略記法である．

A2.3　分数1次関数のグラフ

I．定　義

a，b，c，d を定数として

$$y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の形の関数を **分数1次関数** という．

1°　分数1次関数①を考えるときは，

$$J=ad-bc\neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

という仮定をすることがよくある．

実際，$J=0$ の場合，たとえば，$c\neq 0$，$d\neq 0$ とすると

$$ad-bc=0,\ cd\neq 0 \Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

そこで，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=k$ とおくと，$a=kc$，$b=kd$ だから，

$$y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{k(cx+d)}{cx+d}=k\ \left(ただし，x\neq -\frac{d}{c}\right)$$

いいかえれば，分母を0とする x の値を別として考えれば，$f(x)$ は定数関数になってしまい，つまらない．

2°　さらに $c=0$，$d\neq 0$ ならば，①は

$$y=f(x)=\left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{b}{d}\right)$$

と書けるから，1次以下の関数である．これもつまらない．

3°　上の事情から，以下では

$$c \neq 0,\quad ad-bc \neq 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

という条件のもとに，①を考察する．

II．標準形への変形

上の①の分数1次関数を次の手順で変形することができる．

すなわち，

$ax+b$

を

$cx+d$

で割算して商と余りを求めると右のようになる．

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{a}{c} \quad \longleftarrow \text{商} \\ cx+d\,) & ax+b \\ & ax+\dfrac{ad}{c} \\ \hline & b-\dfrac{ad}{c} \quad \longleftarrow \text{余り} \end{array}$$

したがって，

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cx+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\times\frac{1}{x+\dfrac{d}{c}}$$

そこで，

$$k=\frac{bc-ad}{c^2},\quad \alpha=-\frac{d}{c},\quad \beta=\frac{a}{c} \qquad \cdots\cdots ④$$

とおけば，

$$y=f(x)=\frac{k}{x-\alpha}+\beta \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる．

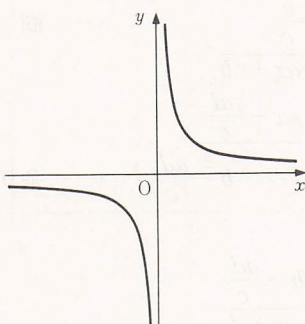
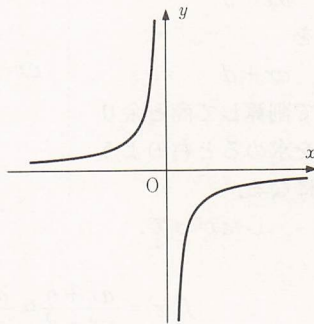
1°　例　$y=f(x)=\dfrac{6x+5}{3x+2}$ の場合．

$$y=2+\frac{1}{3x+2}=2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+\dfrac{2}{3}}$$

III．　分数１次関数のグラフ

分数１次関数のうちで，もっとも簡単なものは，反比例を表す

$$y=\frac{k}{x}\qquad(k\neq 0)$$

であり，そのグラフは，原点を中心とする図のような直角双曲線である．x 軸，y 軸がその漸近線になることに注意する．

$k>0$ の場合　　　　　$k<0$ の場合

このグラフを平行移動することによって，一般の分数１次関数のグラフが得られる．すなわち，

> $y=f(x)=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta\qquad(k\neq 0)$　のグラフは，
>
> 直角双曲線　$y=\dfrac{k}{x}$　を（その形を変えずに）平行移動して，
>
> その中心が $(\alpha,\ \beta)$ にくるようにしたものである．

$y=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta$ のグラフ

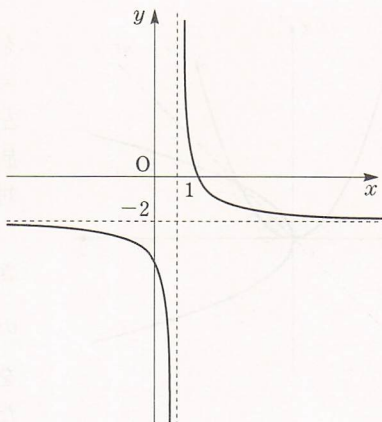
1°　$y=\dfrac{k}{x-\alpha}+\beta$ $(k\neq 0)$ のグラフは，中心が $(\alpha,\ \beta)$ の直角双曲線であり，座標軸に平行な直線 $x=\alpha$，$y=\beta$ がその漸近線となっている．

2°　例　$y=f(x)=\dfrac{3-2x}{x-1}$

のグラフ：

$$y=f(x)=\frac{1}{x-1}-2$$

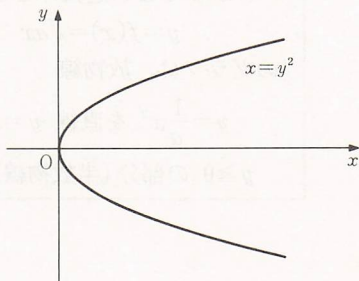
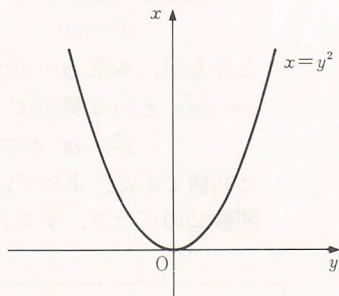
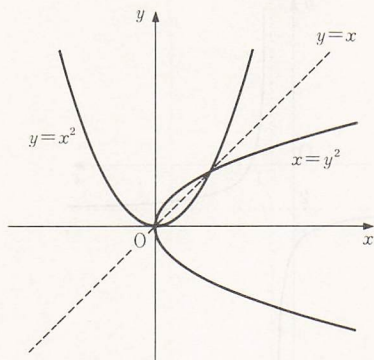
と変形する．

漸近線は $x=1$ と $y=-2$ で，グラフは右のようになる．

A 2.4　無理関数のグラフ

I.　$x=y^2$ のグラフと $y=x^2$ のグラフの関係

関係 $x=y^2$ において，変数 y の値をさきに定めると変数 x の値がそれに応じて定まる．そこで自変数 y を横軸，従属変数 x を縦軸にとって図示すれば，右図のようになる．

この図では，軸の取り方がふつうとは異なっているが，グラフの形自体は，横軸を x 軸，縦軸を y 軸にとったときの $y=x^2$ のグラフである放物線と同じである．

すなわち，ふつうのように，横軸を x 軸，縦軸を y 軸にとれば，$x=y^2$ のグラフは右下図のように，“横にねた放物線”となる．

ふつうのように，横軸を x 軸，縦軸を y 軸として $y=x^2$ のグラフと $x=y^2$ のグラフを同時に図示したのが，左の図である．両者は全く同じ形の放物線であり，直線 $y=x$ に関して対称である．

同様に，a を 0 でない定数とするとき，$ax=y^2$ のグラフは，放物線 $ay=x^2$，すなわち，放物線 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ を，直線 $y=x$ に関して対称移動したものである．

Ⅱ．$\boldsymbol{y=\sqrt{ax}}$ のグラフ

a は 0 でない定数として，関数 $y=\sqrt{ax}$ のグラフを考察しよう．

$$y=\sqrt{ax} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

は，両辺を2乗すると

$$y^2=ax \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるが，本来 $y=\sqrt{ax}\geqq 0$ である．いいかえれば，$y=\sqrt{ax}$ という関係は

$$y^2=ax \text{ かつ } y\geqq 0$$

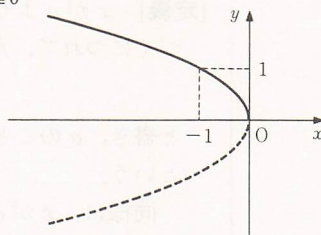
と同値である．よって，関数①のグラフは
関数②のグラフ，すなわち放物線 $y^2=ax$ の上半分である．

> a が 0 でない定数のとき，無理関数
>
> $$y=f(x)=\sqrt{ax}$$
>
> のグラフは，放物線
>
> $y=\dfrac{1}{a}x^2$ を直線 $y=x$ に関して対称に移した放物線の $y\geqq 0$ の部分（半放物線）である．

$\boldsymbol{y=\sqrt{ax}}$ のグラフ

1° 例　$y=\sqrt{-x} \iff x=-y^2$ かつ $y \geqq 0$

よって，$y=\sqrt{-x}$ のグラフは，右図の実線となる．

点線は $y=-\sqrt{-x}$ のグラフである．

III．$y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

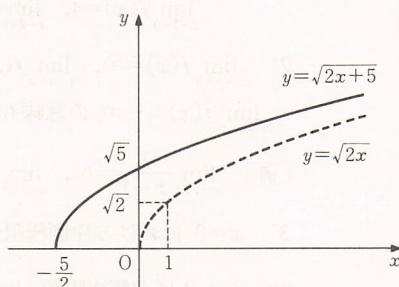
$y=\sqrt{ax}$ のグラフを，x 軸の方向に p，y 軸の方向に q だけ平行移動した曲線は

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q$$

のグラフである．このことから，特に $p=-\dfrac{b}{a}$，$q=0$ として，$y=\sqrt{ax+b}$ のグラフが描くことができる．

1° 例　$y=\sqrt{2x+5}$ のグラフ

$$y=\sqrt{2x+5}=\sqrt{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}$$

と変形されるから，そのグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸の方向に $-\dfrac{5}{2}$ だけ移動したものである．

A 2.5　関数の極限

I．片側極限

x が a に近づくにつれ，$f(x)$ がある数 α に近づくとき，

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$$

と書いたが，後の便宜のために，次のような片側極限の概念を定義しておく．

> **[定義]**　x が a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくにつれて，$f(x)$ が定数 α に限りなく近づくとき，
> $$\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$$
> と書き，α のことを $f(x)$ の $x=a$ における **右側極限値** という．
>
> 同様に，x が a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくにつれて，$f(x)$ が定数 β に限りなく近づくとき，
> $$\lim_{x\to a-0} f(x)=\beta$$
> と書き，β を $f(x)$ の $x=a$ における **左側極限値** という．

片側極限

1°　関数　$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x>2) \\ -(x+2) & (x<2) \end{cases}$　の場合

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=4,\quad \lim_{x\to 2-0} f(x)=-4$$

2°　$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ の意味も同様に定義される．

例　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

3°　$x=0$ における片側極限値は，$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x)$ と書く．

4°　たとえば右側極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ は，$f(x)$ が $x\leqq a$ で定義されていない場合にも考察の対象となる．(左側極限値も同様)

II．極限と片側極限

> **[定理]**　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は，
> $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに存在して一致することである．また，そのとき
> $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

片側極限と極限値との関係

1°　この定理は，直観的には，「右から来ても左から来ても同じ値 α に近づくならば，どんな近づき方をしても α に近づく」として納得することができる．

しかし厳密な証明をするには，極限の概念の精密な定義(高校の範囲外)が必要になる．

Ⅲ．極限値の演算

数列の極限と同様に，次の定理が成立する．

［定理］ $\lim_{x\to a} f(x)$，$\lim_{x\to a} g(x)$ が存在するとき，

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim_{x\to a}f(x)+\beta\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)$$

さらに　$\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$　ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

極限値の演算

Ⅳ．極限値の比較

［定理］ $x=a$ の近くで $f(x)\leqq g(x)$ が成り立つ($x=a$ では成り立たなくてもよい)とき，$\lim_{x\to a} f(x)$，$\lim_{x\to a} g(x)$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}f(x)\leqq\lim_{x\to a}g(x)$$

≦ の保存

1°　$\lim_{x\to a} f(x)$，$\lim_{x\to a} g(x)$ が存在するとき，$x=a$ の近くで，

$$f(x)<g(x)$$

が成り立つからといって，$\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}g(x)$ が成り立つとは限らない．この事態は，A 1.5 Ⅰ (p.7) で述べた数列の場合と同様である．

V．はさみ打ち

はさみ打ち

［定理］　$x=a$ の近くで（$x=a$ を除外してもよい）

$$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$$

が成り立ち，

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$$

ならば，$\lim_{x\to a} f(x)$ も存在して，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

である．

VI．三角関数と極限

次の極限値は，三角関数の導関数を求めるときに使われる．

［定理］　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

1°　このように，極限値が1という単純な数になったのは，弧度法を用いたからである．

2°　高校レベルでこれを示すには，図形的直観に頼るが，詳しくは教科書参照．

VII．自然対数の底 e

A 2.1 IV で予告した自然対数の底 e の正確な定義を掲げる．

e の定義

［定義］　$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1°　上の極限値が存在することの証明は，高校のレベルを超える深い知識を必要とする．（☞ A 6.4 II）しかし，コンピュータで数値計算してみると，下のように，極限値が存在することが予想できる．

x	$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
1	2
5	2.48832………
10	2.59374246………
100	2.70481382………
1000	2.71814592………
100000	2.71828046………

上の e の定義の言いかえに近いが，次の極限値は，指数関数，対数関数の導関数を求めるときに用いられる．

［定理］ $\lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

A 2.6　関数の連続性

I．連続性

関数 $y=f(x)$ のグラフが途切れずにつながっているとき，$f(x)$ は連続であるという．より正確には，

［定義］ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立することである．　**連続性**

［定義］ 関数 $f(x)$ が開区間 I の各点で連続であるとき，$f(x)$ は I で連続であるという．　**開区間での連続性**

［定義］ 関数 $f(x)$ が

(i) 開区間 $a<x<b$ で連続である．

(ii) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ が成立する．

(iii) $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ が成立する．

を満たすとき，$f(x)$ は閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続であるという．　**閉区間での連続性**

区間 I を定義域とする関数 $f(x)$ が I で連続であるとき，$f(x)$ は連続関数であるという．

1°　n 次関数，$\sin x$，$\log x$ は連続関数である．

II．連続関数の四則と合成

つぎの定理は高校レベルでは自明のこととして用いられる．

> [定理]　関数 $f(x)$, $g(x)$ が連続であるとき,
> 線形結合 $\alpha f(x)+\beta g(x)$, 積 $f(x)g(x)$,
> 商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 合成関数 $g(f(x))$
> は, それらが定義される各点で連続である.

連続関数の四則と合成

III．連続関数の逆関数

つぎの定理も, 直観的には明らかだが, 厳密な証明をするには, 高校レベルを超える知識が必要である.

> [定理]　ある区間 I で定義された連続関数 $y=f(x)$ が逆関数をもつなら, 逆関数も連続である.

連続関数の逆関数

1°　陰関数表示やパラメータ表示によって定義された関数の連続性を保証する定理もあるが, ここでは触れない.

IV．連続関数の接続

接続によって定義された関数, たとえば

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x<a \\ c & x=a \\ g(x) & x>a \end{cases}$$

の $x=a$ における連続性は, 一般に保証されない. この関数の連続性の判定には, A 2.5 IIの定理を用いる. すなわち

$$\begin{aligned} &h(x)\text{ は }x=a\text{ で連続} \\ \iff &\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=c \end{aligned}$$

1°　例　$y=|x|$ は $x=0$ で連続である.

V．厳密な証明は難しいが, 次の定理が成立する.

> [定理]　区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)$ は連続で, $f(a)<f(b)$ とする. $f(a)<c<f(b)$ なる任意の c に対し, 次のような x が少くとも1つ存在する.
> $$f(x)=c,\quad a<x<b$$

中間値の定理

A 2.7 導関数

I．導関数の定義

つぎの極限値

$$l=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は点 $x=a$ で微分可能であるという．また，l を $f(x)$ の $x=a$ における微分係数といい，$f'(a)$ で表す．

関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の **導関数** という．導関数の定義域は，$f(x)$ が微分可能な点全体である．

$y=f(x)$ の導関数を表す記号としては，$f'(x)$ のほかに

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

なども用いられる．

ある開区間 I のすべての点において $f(x)$ が微分可能であるとき，$f(x)$ は I で **微分可能** であるという．

1°　例　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，$f(x)=x^n$ は微分可能で
$(x^n)'=nx^{n-1}$

II．基本的な関数の導関数

［定理］
(i)　$(\sin x)'=\cos x$
(ii)　$(\cos x)'=-\sin x$
(iii)　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$　　$(x\neq 0)$
(iv)　$(e^x)'=e^x$

1°　(i)(iii)(iv)から，$\sin x$，$\log x$，e^x のグラフの $x=1$ における接線の傾きは 1 であることが分かる．

2°　**証明**：(i)　見やすくするために $h=2\theta$ とおくと，

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin((x+\theta)+\theta)-\sin((x+\theta)-\theta)}{2\theta}$$
$$=\frac{2\cos(x+\theta)\sin\theta}{2\theta}=\cos(x+\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$

$h\to 0$ のとき $\theta\to 0$ であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{\theta\to 0}\cos(x+\theta)\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos x$$

(ii)　(i)と同様

(iii)　見やすくするために $h=xt$ とおくと，

$$\frac{\log|x+h|-\log|x|}{h}=\frac{1}{xt}\log\left|\frac{x+xt}{x}\right|$$
$$=\frac{1}{x}\log|1+t|^{\frac{1}{t}}$$

$h\to 0$ のとき $t\to 0$ であり，$|1+t|^{\frac{1}{t}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}\to e$

ゆえに，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log|x+h|-\log|x|}{h}$$
$$=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

(iv)　$\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\dfrac{e^h-1}{h}$

ここで $t=e^h-1$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ であり

$h=\log(1+t)$ であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{t\to 0}e^x\frac{t}{\log(1+t)}$$
$$=e^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$
$$=e^x\frac{1}{\log e}=e^x$$

III．連続性と微分可能性

次の定理は，種々の微分法則を導くのに用いられる．

> ［定理］　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．
>
> 　すなわち，微分可能な関数は連続関数である．

微分可能なら連続

1°　証明：$f(x)-f(a)=(x-a)\cdot\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$　$(x\neq a)$

$\therefore$　$\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\cdot f'(a)=0$

$\therefore$　$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

2°　定理の逆は成立しない．☞ A 2.8 V

A 2.8　微分法則

A 2.2 の関数の構成法のそれぞれに対応する微分の法則がある．

I．四則と微分

> [定理]　$f(x)$，$g(x)$ が微分可能のとき，線形結合，積，商は，それらが定義される点で微分可能で，次式が成立する．
>
> (i)　$(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$
>
> (ii)　$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
>
> (iii)　$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

四則と微分

1°　例　$(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

2°　(iii)の証明

$u=f(x)$，$v=g(x)$，$y=\dfrac{u}{v}$ とおく．また，x の増分 $\varDelta x$ に対する y の増分を $\varDelta y$，u，v の増分を $\varDelta u$，$\varDelta v$ とおく．すなわち，

$$\varDelta u=f(x+\varDelta x)-f(x),\quad f(x+\varDelta x)=u+\varDelta u$$
$$\varDelta v=g(x+\varDelta x)-g(x),\quad g(x+\varDelta x)=v+\varDelta v$$

とすれば，

$$\varDelta y=\frac{f(x+\varDelta x)}{g(x+\varDelta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u+\varDelta u}{v+\varDelta v}-\frac{u}{v}=\frac{\varDelta u\cdot v-u\cdot\varDelta v}{(v+\varDelta v)v}$$

$$\therefore\quad \frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\dfrac{\varDelta u}{\varDelta x}v-u\dfrac{\varDelta v}{\varDelta x}}{v(v+\varDelta v)}$$

ここで，$\varDelta x\to 0$ ならしめると，v の連続性により (A 2.7 III) $\varDelta v\to 0$ であることに注意して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{du}{dx}v-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

が得られる．

II. 合成と微分

合成関数の微分法

［定理］ $y=f(u)$, $u=g(x)$ がそれぞれ u, x の微分可能な関数であるとき，合成関数 $y=f(g(x))$ について

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

が成立する．視覚的に書けば，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

1° 特に $g(x)=ax+b$ とすると，$g'(x)=a$ だから，

$$\frac{d}{dx}(f(ax+b))=af'(ax+b)$$

2° 例 $f(u)=e^u$, $g(x)=kx$ とすると

$$\frac{d}{dx}e^{kx}=\frac{d}{dx}f(g(x))$$
$$=e^u\cdot k$$
$$=ke^{kx}$$

さらに $k=\log a$ とすると

$$(a^x)'=(e^{kx})'=ke^{kx}=(\log a)a^x$$

3° **定理の証明：**

x の増分 $\varDelta x$ に対する $u=g(x)$ の増分を $\varDelta u$ とし，$y=f(g(x))$ の増分を $\varDelta y$ とする．$\varDelta y$ はまた，$y=f(u)$ における u の増分 $\varDelta u$ に対する y の増分と考えることもできる．

$u=g(x)$ は連続だから，$\varDelta x\to 0$ のとき $\varDelta u\to 0$ となることに注意して

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\frac{\varDelta u}{\varDelta x}$$

と書き直し，$\varDelta x\to 0$ の極限を考察すると

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta u\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta u}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta u}{\varDelta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

が得られる．

III．逆関数と微分

逆関数の微分可能性にはデリケートな問題があるが，A 2.6 のIIIに述べた定理を用いると，つぎのことが分る．

逆関数の微分法

［定理］ 関数 $y=f(x)$ が逆関数 $x=g(y)$ をもち，g が微分可能ならば，

(i) $g'(f(x))\neq 0$ なる x に対して $f'(x)$ が存在し

(ii) $f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$ が成立する．

視覚的に書けば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

1° **証明**：$y=f(x)$ において変数 x の増分 Δx に対する関数値 y の増分を Δy とすれば，これは，$x=g(y)$ において変数 y の増分を Δy としたときの関数値 x の増分が Δx であることを意味している．

g は微分可能だから連続であり，A 2.6 IIIにより f も連続であることに注意する．さて，

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

において，$\Delta x\to 0$ ならしめれば，$y=f(x)$ は連続であるから，$\Delta y\to 0$ となる．そして，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{dx}=f'(x),\quad \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)=\frac{dx}{dy}=g'(y)$$

であるから，①より

$$f'(x)g'(y)=1,\ すなわち\ \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$$

を得る．

2° 例 $y=\log x$ の逆関数 $x=e^y$ は微分可能で

$$\frac{dx}{dy}=e^y$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

Ⅳ．　媒介変数表示と微分

ある区間 I で定義された微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ を用いて

$$x=f(t), \qquad y=g(t)$$

とおく．

もし，f の逆関数 f^{-1} が存在し $f'(t)\neq 0$ ならば，f^{-1} は微分可能となり

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{f'(t)}$$

が成り立つ．そこで，$y=g(f^{-1}(x))$ と見て，x で微分すると，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

が成立する．すなわち，

媒介変数表示の微分

［定理］　x，y がそれぞれ t の微分可能な関数で

$$\frac{dx}{dt}\neq 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

1°　例　$x=t^3+t$，$y=t^3-t^2$ とすると，

$$\frac{dx}{dt}=3t^2+1,\ \frac{dy}{dt}=3t^2-2t \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-2t}{3t^2+1}$$

この結果の式を x のみで表すのは困難である．それはふつうの知識ではできないし，また，できたとしても得策でない．

しかし，たとえば，$t=1$ に対応する $x=2$，$y=0$ のときの微分係数の値は，

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,y=0}=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1}=\frac{3-2}{3+1}=\frac{1}{4}$$

のように求められる．

これは，媒介変数表示された曲線 $x=t^3+t$，$y=t^3-t^2$ 上の $t=1$ に対応する点 $(2,\ 0)$ での接線の傾きが $\frac{1}{4}$ であることを示している．

2°　より深い知識を用いると，$f'(t_0)\neq 0$ なる t_0 の近くに限ると，$x=f(t)$ は逆関数をもつことを一般的に示すことができる．

V．　接続と微分

微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の接続により定義された関数，たとえば

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x<a \\ c & x=a \\ g(x) & x>a \end{cases}$$

の接続点における微分可能性は，一般に保証されない．その判定には，A 2.5 IIの定理を用いる．すなわち

$h(x)$ は $x=a$ で微分可能である

$$\iff \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-c}{x-a} \\ \displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)-c}{x-a} \end{array}\right\} \text{が存在して一致する}$$

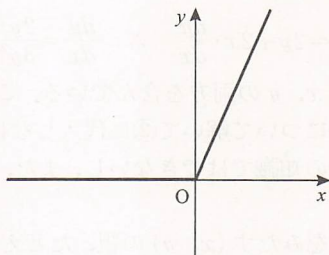
そして，一致した極限値が $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$ である．

例　$f(x)=\begin{cases} 2x & \cdots\cdots\ x\geqq 0 \\ 0 & \cdots\cdots\ x\leqq 0 \end{cases}$

は $x=0$ で連続であるが，$x=0$ で微分可能ではない．実際，

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to+0}2=2$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to-0}0=0$$

すなわち，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ において x を 0 に近づけるとき，右側極限値と左側極限値とが一致しない．よって，$x=0$ で $f(x)$ は微分不可能である．

A 2.9 陰関数の微分法

I．合成関数の微分法の応用として，つぎのような計算をすることができる．たとえば，

$$x^2-y^3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

によって x の関数 y が与えられたとしよう．

①の左辺において，y^3 を x の関数とみなし，合成関数の微分法を適用すれば

$$\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dy}y^3\cdot\frac{dy}{dx}=3y^2\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．②を考慮しながら，①の両辺を x で微分すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(\text{①の左辺})=\frac{d}{dx}(x^2-y^3)=\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}y^3=2x-3y^2\cdot\frac{dy}{dx}\\&\frac{d}{dx}(\text{①の右辺})=\frac{d}{dx}0=0\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad 2x-3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore\quad y\neq 0 \text{ なら } \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2} \qquad \cdots\cdots ③$$

さらに，①より $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$，これを③に代入すれば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3(x^{\frac{2}{3}})^2}=\frac{2x}{3x^{\frac{4}{3}}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\quad (x\neq 0) \qquad \cdots\cdots ④$$

が得られる．

一般に，上のような計算法を **陰関数の微分法** とよぶ．

II．次に　$x^3+y^3=2xy$　$\cdots\cdots\cdots ①$

で定められる x の関数 y の導関数を求めてみよう．①の両辺を x で微分すれば，

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=2y+2x\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

②の右辺は x，y の両方を含んでいる．これを x のみで表すには，①を y について解いて②に代入しなければならないが，それはふつうの知識ではできないし，また，できたとしても得策でない．

しかし，①をみたす $(x,\ y)$ の組，たとえば $x=1$，$y=1$ が与えられたとき，そこでの微分係数の値は，②より

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1, y=1}=\frac{2-3}{3-2}=-1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

のように求められる．これは，曲線①上の点 P(1, 1) での接線の傾きが -1 であることを示している．

Ⅲ．対数微分法

陰関数の微分法の応用として，対数微分法を説明しよう．

$$y=f(x) \quad \cdots\cdots ①$$

の導関数を求めるために，まず両辺の対数を取り

$$\log y=g(x), \text{ ただし } g(x)=\log f(x) \quad \cdots\cdots ②$$

とする．両辺を x で微分して，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=g'(x) \quad \therefore \quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=yg'(x)=f(x)g'(x) \quad \cdots\cdots ③$$

このような計算法は **対数微分法** とよばれ，$g'(x)$ が計算しやすいときに有効である．

1°　例　$y=x^x$ $(x>0)$ の導関数を求める．

$$\log y=x\log x \qquad \therefore \quad \frac{y'}{y}=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$\therefore \quad y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$$

[定理]　任意の実数の定数 α に対し

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1} \quad (x>0)$$

ベキ関数の導関数

1°　証明：

$y=x^{\alpha}$ ……①　の両辺の対数をとり，$\log y=\alpha\log x$ ……②

$\dfrac{d}{dx}(\alpha\log x)=\dfrac{\alpha}{x}$ を用いて，②の両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\alpha y}{x}=\frac{\alpha x^{\alpha}}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

A 2.10 高次導関数

たとえば，関数 $f(x)=x^4$ の導関数 $f'(x)=4x^3$ は x の関数であり，それをもう一度微分すれば $(f'(x))'=12x^2$ となる．このように

[定義] 関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数 $\{f'(x)\}'$ を $f(x)$ の **第2次導関数** といい， y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などの記号で表す．

第2次導関数

1° 例　$f(x)=x^4$ ならば $f''(x)=12x^2$ である．これを $(x^4)''=12x^2$ のように書くことが多い．

[定義] $y=f(x)$ を x で n 回微分して得られる関数を $y=f(x)$ の **第 n 次導関数** といい， $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などの記号で表す．

第 n 次導関数

例　$f(x)=x^\alpha$ ($\alpha \fallingdotseq$ 自然数，$x>0$) のときは

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1},\ f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

例　指数関数 $f(x)=e^x$ のときは

$$f'(x)=f''(x)=\cdots\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

——A 2 おわり——

Repos

力のたし算

いくつかの力をなぜたしあわせることができるのでしょう．そもそも力をたすということはどういうことなのでしょう．力の加法がベクトルの加法とまったく同じだといっても答えにはなりません．

3人のお母さんがデパートのバーゲン会場で一つのセーターを引っ張りあっていますがどうにも勝負がつきそうもありません．これは3つの力がつりあっている，言いかえると3つの力の和が0だからです．これを力のたし算の意味で

$$A+B+C=0$$

と書きましょう．また2つの力C，Dがつりあっているなら

$$C+D=0$$

ということになります．これらのつりあい条件から我々は次のような結論

$$A+B=D$$

を引き出せるでしょう．すなわち「二つの力A，Bが同時に作用したときに起きることは一つの力Dが作用した結果と同じである」と．これが力の足し算です．そしてA，Bに対してDがどのように定まるかは一つの自然法則であり実験以外にそれを知る手だてはありません．

「3人寄れば文殊の知恵」といいますし「船頭多くして舟山に上る」ともいいますから人間の力の足し算は単純ではありません．それでは自然の力の足し算はどうなのでしょう．これはバネ秤が3つあればできる簡単な実験ですから一度やってみてください．その結果あなたは数学で学んだベクトルの加法にぴったり一致する自然のふるまいを見出すでしょう．これはよく考えてみると不思議なことですね．

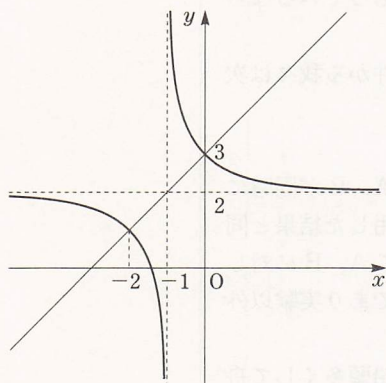
B. 201

(1) 関数 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ のグラフを描け.

(2) (1)を利用して不等式 $\dfrac{2x+3}{x+1}\leqq x+3$ を解け.

アプローチ $\dfrac{px+q}{rx+s}$ $(r\neq 0)$ は，右のような計算により，$\dfrac{p}{r}+\dfrac{qr-ps}{r(rx+s)}$ と変形できます.

☞ A 2.3 II

解答 (1) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$ ………①

のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x，y 軸方向にそれぞれ -1，2 だけ平行移動したものであるので右図の太線部のような双曲線になる.

(2) 与えられた不等式の解は，

直線 $y=x+3$ ……②

が双曲線①の上方にある (下方にない) ような x の範囲である.

①，②の交点の x 座標は，

$\dfrac{2x+3}{x+1}=x+3$ から

$2x+3=(x+3)(x+1)$

$\therefore\ x^2+2x=0\quad\therefore\ x(x+2)=0\quad\therefore\ x=0$ または -2.

よって，(1)のグラフから求める解は，

$\boldsymbol{-2\leqq x<-1}$ **または** $\boldsymbol{x\geqq 0}$

となる.

$x=-1$ も限界になることに注意.

[注] 一般に，A，B を実数とするとき，$\dfrac{B}{A}\geqq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} AB\geqq 0 \\ A\neq 0 \end{cases}$ が成り立つ.

したがって，本問の不等式は，$x+3-\dfrac{2x+3}{x+1}\geqq 0\quad\therefore\ \dfrac{x(x+2)}{x+1}\geqq 0$ より，

$x(x+1)(x+2)\geqq 0$ かつ $x\neq -1$ と同値変形できる.

B. 202

関数 $y=\dfrac{bx+a}{x+a}$ ……① のグラフを適当に平行移動したら，

関数 $y=\dfrac{x+b}{x+3}$ ……② のグラフが得られたという．

(1) 実数 a，b の満たす条件を求めよ．

(2) この条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を求め ab 平面上に図示せよ．

アプローチ ①，②のグラフは，それぞれどんな関数のグラフを平行移動したものでしょうか．

解答 (1) $y=\dfrac{bx+a}{x+a}=b+\dfrac{a-ab}{x+a}$ ……①

$y=\dfrac{x+b}{x+3}=1+\dfrac{b-3}{x+3}$ ……②

となるから，①，②のグラフは，それぞれ，

$xy=a-ab$ ……①′

$xy=b-3$ ……②′

を平行移動したものである．したがって両者が平行移動によって重なるためには，①′と②′が一致していること，すなわち

$a-ab=b-3$

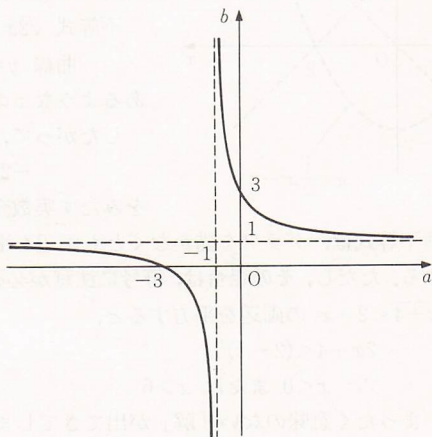
$\therefore\ \ \boldsymbol{ab-a+b-3=0}$

が成り立つことが必要十分である．

(2) 上で得た結果は

$(a+1)b=a+3$

$\therefore\ \ b=\dfrac{a+3}{a+1}=1+\dfrac{2}{a+1}$

と変形される．ゆえに，求める図形は，右図の双曲線である．

B.203

関数 $y=\sqrt{2x+4}$ のグラフを，その逆関数を利用して描け．また，このグラフを用いて，不等式 $\sqrt{2x+4}<2-x$ を解け．

アプローチ “$y=\sqrt{2x+4} \Longrightarrow y^2=2x+4$” ……(＊)　という関係が成立するがその逆は成立しないから，$y=\sqrt{2x+4}$ ……①　のグラフは，$y^2=2x+4$ ……②　のグラフの一部です．

②において，x と y を交換すると，$x^2=2y+4$ すなわち $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$ という2次関数が出てきます．

解答　$y=\sqrt{2x+4}$ ……①　は，連立条件

$$\begin{cases} y^2=2x+4 & \cdots\cdots ② \\ y\geqq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と同値である．ここで，x と y を交換すると

$$\begin{cases} x^2=2y+4 \\ x\geqq 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2-2 & \cdots\cdots ④ \\ x\geqq 0 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

という2次関数が得られる．

①のグラフは，②かつ③のグラフと同一で，②かつ③のグラフと④かつ⑤のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称であるので，①のグラフは，左図の実線で示される．

不等式 $\sqrt{2x+4}<2-x$ の解は，xy 平面上で

曲線 $y=\sqrt{2x+4}$ が直線 $y=2-x$ の下側にあるような x の値の範囲である．

したがって，求める解は，

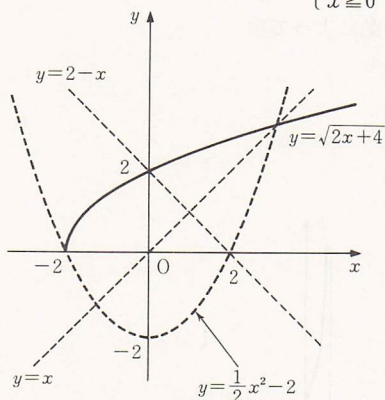
$$\boldsymbol{-2\leqq x<0}$$

をみたす実数全体である．

［注］　無理不等式は，グラフを描かなくとも両辺を平方して根号をはずすことにより解くこともできる．ただし，その場合は，符号に注意が必要である．不等式の両辺の符号を無視して，$\sqrt{2x+4}<2-x$ の両辺を平方すると，

$$2x+4<(2-x)^2 \qquad \therefore \quad x^2-6x>0$$

$$\therefore \quad x<0 \text{ または } x>6$$

という，まったく意味のない「解」が出てきてしまう．

B.204

関数 $f(x)=\dfrac{ax+5}{3x+2}$ がある.

$$f(f(x))=x \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が,(＊)の両辺が意味をもつようなすべての x の実数値に対して成り立つという. $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ.

アプローチ $f(f(x))$ とは, $f(x)=\dfrac{ax+5}{3x+2}$ の x に $f(x)$ を代入したものです.

解答 $f(f(x))=\dfrac{af(x)+5}{3f(x)+2}$

$$=\frac{a\dfrac{ax+5}{3x+2}+5}{3\dfrac{ax+5}{3x+2}+2}$$

◁ $f\left(\dfrac{ax+5}{3x+2}\right)$ と考えてもよい.

$$=\frac{(a^2+15)x+(5a+10)}{(3a+6)x+19}$$

となることから,(＊)がつねに成立するためには,

$$(3a+6)x^2+19x=(a^2+15)x+(5a+10)$$

$$\therefore \quad 3(a+2)x^2-(a^2-4)x-5(a+2)=0$$

がつねに成り立つことが必要十分である.

よって

$$3(a+2)=-(a^2-4)=-5(a+2)=0$$

◁ 恒等式の条件

より,

$$a=-2$$

である.

そして,このとき

$$f(x)=\frac{-2x+5}{3x+2}$$

となる.

$f(x)$ の逆関数は, $f(x)$ が(＊)を満たすことから, $f(x)$ 自身である.つまり

◁ 普通に求めてもよい.

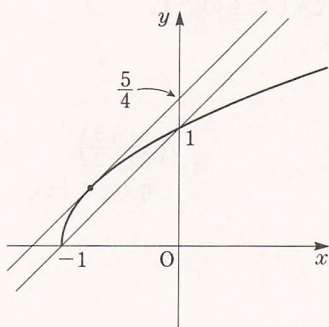
$$f^{-1}(x)=\boldsymbol{\frac{-2x+5}{3x+2}}$$

である.

[注] 上の分数式の係数から作った行列 $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ の2乗 A^2 は $A^2=19E$ と単位行列の実数倍になっている.これは偶然ではない.

B.205

x の方程式 $\sqrt{x+1}=x+a$ ……① が異なる2つの実数解をもつような実数の定数 a の条件を求めよ．

アプローチ 計算だけで処理しようとするとやや面倒なことになります（☞［注］）．グラフを利用してスッキリ解きましょう．

解答 方程式①を満たす実数値 x は，xy 平面上の

曲線 $y=\sqrt{x+1}$ ……②

と直線 $y=x+a$ ……③

の共有点の x 座標である．

よって，②，③が異なる2点を共有するような a の条件を求める．

③が点 $(-1,\ 0)$ を通るのは，$a=1$ のときである．また，②，③が接するのは，①の両辺を平方して得られる

$$x+1=(x+a)^2$$

$$\therefore\quad x^2+(2a-1)x+a^2-1=0$$

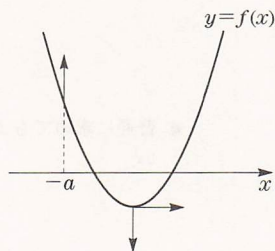
が重解をもつときであるので，

$$\text{判別式}=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0 \text{ から } a=\frac{5}{4}.$$

したがって，上図より求める a の値の範囲

$$\boldsymbol{1 \leqq a < \frac{5}{4}}$$

が分かる．

［注］ ① $\Longleftrightarrow \begin{cases} x+1=(x+a)^2 \\ x+a \geqq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+(2a-1)x+a^2-1=0 & \cdots\cdots④ \\ x \geqq -a & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$

グラフを利用しないと，x の2次方程式④が⑤の範囲に異なる2実数解をもつ条件を考えることになる．

④の左辺を $f(x)$ とおくと，その条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}=(2a-1)^2-4(a^2-1)>0 \\ \text{軸：}\quad -\dfrac{2a-1}{2}>-a \\ \text{端点：}\quad f(-a)\geqq 0 \end{cases}$$

となる．

B. 206

x の関数列 $\{f_n(x)\}_{(n=1,2,3,\cdots)}$ を関数 $f(x)=ax+b$ を用いて,

$$\begin{cases} f_1(x)=f(x) \\ f_{n+1}(x)=f(f_n(x)) \quad (n \geqq 1) \end{cases}$$

で定める．ただし，$a \neq 1$ とする．

(1)　$f_2(x)$ を求めよ．　　(2)　$f_n(x)$ を求めよ．

アプローチ　$f_2(x)=f(f_1(x))$ は $f(x)=ax+b$ の x を $f_1(x)$ に置き換えたものです．

解答　(1)　$f_2(x)=f(f_1(x))$

$$=af_1(x)+b$$

$$=a(ax+b)+b$$

◀ $f_1(x)=f(x)$
$=ax+b$

$$=a^2x+ab+b$$

$$=\boldsymbol{a^2x+(a+1)b}.$$

(2)　$f_3(x)=f(f_2(x))$

◀ 直接求められそうにないので"推定⇒証明"という手順を踏もうとしている．

$$=af_2(x)+b$$

$$=a\{a^2x+(a+1)b\}+b$$

$$=a^3x+(a^2+a+1)b$$

$f_4(x)=f(f_3(x))$

$$=af_3(x)+b$$

$$=a\{a^3x+(a^2+a+1)b\}+b$$

$$=a^4x+(a^3+a^2+a+1)b$$

これより，一般に，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し

$$f_n(x)=a^nx+(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)b \quad \cdots\cdots(*)$$

であると推定できる．

この推定が正しいことを n に関する数学的帰納法で証明する．

まず，$n=1$ のとき $(*)$ は正しい．

◀ $f_1(x)=ax+b$

次に，ある自然数 n について $(*)$ が成り立つと仮定すると，

$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$

$$=af_n(x)+b$$

$$=a\{a^nx+(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)b\}+b$$

◀ 帰納法の仮定を用いた．

$$=a^{n+1}x+(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1)b$$

となり，$(*)$ が n の代わりに1つ番号が増えた $n+1$ のときにも成り立つことになる．

よって，求める $f_n(x)$ は $(*)$，すなわち，

$$f_n(x)=\boldsymbol{a^nx+\frac{a^n-1}{a-1}b} \quad \text{である．}$$

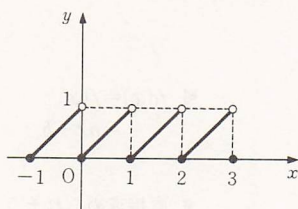
◀ 等比数列の和の公式を用いた．

B.207

$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表す(ガウスの記号). 次の各関数のグラフを $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲で描け.

(1)　$f(x)=x-[x]$

(2)　$g(x)=[2x]-2[x]$

アプローチ　実数 x に対し, $n\leqq x<n+1$ となる整数 n が $[x]$ で表されるものです.

解答　(1)　$f(x)=x-[x]$ において

i)　$0\leqq x<1$ では $[x]=0$ だから $f(x)=x$.

よって, この範囲ではグラフは直線 $y=x$ と一致する.

ii)　任意の x に対して,

$[x+1]=[x]+1$ であるから,

$$\begin{aligned}f(x+1)&=(x+1)-[x+1]\\&=(x+1)-([x]+1)\\&=x-[x]=f(x)\end{aligned}$$

が成り立つので, $f(x)$ は周期1の周期関数である. したがってグラフは $0\leqq x<1$ でのグラフの繰り返しである.

(2)　$f(x)=[2x]-2[x]$ において, まず,

$0\leqq x\leqq 1$ について調べると, 次のようになる.

1°　$0\leqq x<\dfrac{1}{2}$ の範囲では,

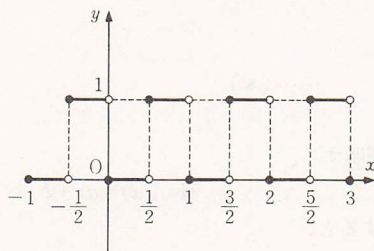
$[2x]=0$, $[x]=0$ であるから $f(x)=0$.

2°　$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ の範囲では,

$[2x]=1$, $[x]=0$ であるから $f(x)=1$.

また, 任意の x に対して,

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[2x+2]-2[x+1]\\&=[2x]+2-2([x]+1)\\&=[2x]-2[x]=f(x)\end{aligned}$$

が成り立つので, $f(x)$ は周期1の周期関数である.

[注]　“任意の x に対して $f(x+p)=f(x)$ が成り立つ”ような正の定数 p が存在するということは, x の値が p 増すごとに $f(x)$ は同じ値をくり返しとるということである. このようなとき, $f(x)$ は周期 p の **周期関数** であるという.

B.208

関数 $f(x)$ は，次の性質を満たすとする．

1°　任意の実数 x に対して，

(i)　$f(-x)=f(x)$　(ii)　$f(x+3)=f(x)$

2°　$f(x)=\begin{cases} 1-x & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (1\leqq x\leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$

(1)　$y=f(x)$ のグラフを，$-4\leqq x\leqq 4$ の範囲で描け．

(2)　$y=f(x-2)$ のグラフを，$-4\leqq x\leqq 4$ の範囲で描け．

(3)　$y=2f\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ のグラフを，$-4\leqq x\leqq 4$ の範囲で描け．

解答　(1)　まず，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$y=f(x)$ のグラフを描く．

条件1°(i)より，$y=f(x)$ は y 軸対称だから，いま描いたグラフの部分を y 軸に関して折り返し，$-2\leqq x\leqq 2$ の範囲にまで拡大する．

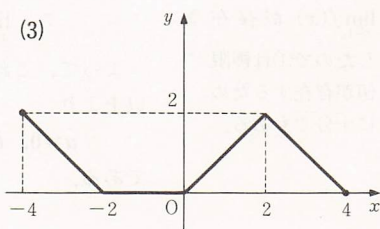
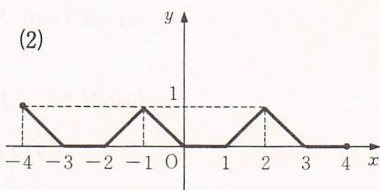
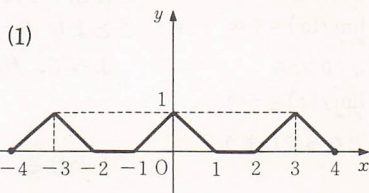
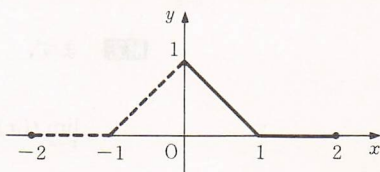
条件1°(ii)より，$f(x)$ は3を周期とする周期関数であるから，$y=f(x)$ のグラフは，いま描いたグラフの $-2\leqq x\leqq 1$ の部分を周期的に繰り返したものである．以上より，

$y=f(x)$ $(-4\leqq x\leqq 4)$ のグラフは右図．

(2)　$y=f(x-2)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを，x 軸の正の方向に2だけ平行移動したものである．したがって，

$y=f(x-2)$ $(-4\leqq x\leqq 4)$ のグラフは右図．

(3)　$y=2f\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)=2f\left(\dfrac{1}{2}(x-2)\right)$ より，

$y=2f\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸の方向に2倍に拡大し $\left(y=f\left(\dfrac{1}{2}x\right)\right)$，次にこれを x 軸の正の方向に2だけ平行移動し $\left(y=f\left(\dfrac{1}{2}(x-2)\right)\right)$，最後にこれを，$y$ 軸方向に2倍に拡大したものである．したがって，グラフは右図．

B. 209

関数 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$ において

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1 \text{ かつ } \lim_{x\to 1}f(x)=0$$

となるように係数 a，b，c，d を定めよ．

アプローチ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}ax$ は $a>0$ のとき $+\infty$，$a<0$ のときは $-\infty$ に発散しますが，$a=0$ のときは 0 に収束します．また，$\displaystyle\lim_{x\to a}F(x)=0$ のときに極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{G(x)}{F(x)}$ が存在するためには $\displaystyle\lim_{x\to a}G(x)=0$ でなければなりません．

解答 まず，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$$

が存在するための条件は $a=0$ であり，この極限値が 1 に等しいことより $b=1$

▶ $a>0$ なら $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ 　$a<0$ なら $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となってしまう．

よって，$f(x)$ は

$$f(x)=\frac{x^2+cx+d}{x^2+x-2}$$

とかける．

$x\to1$ のとき，分母$\to0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$ が存在するためには，分子$\to0$ となること，すなわち

$$\lim_{x\to1}(x^2+cx+d)=1+c+d=0 \quad \cdots\cdots①$$

が必要で，これを用いて，c を消去すると

$$f(x)=\frac{x^2-(d+1)x+d}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x-d)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-d}{x+2}\quad(x\neq1)$$

となる．

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-d}{x+2}=\frac{1-d}{3}$$

▶ $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$ が存在したので①は極限値が存在するために十分でもある．

よって，これが 0 に等しいことより $d=1$．

以上より

$$\boldsymbol{a=0,\ b=1,\ c=-2,\ d=1}$$

である．

B. 210

$\lim_{x\to+\infty}\{\sqrt{4x^2+x+1}-(ax+b)\}=0$ が成立するように，定数 a，b の値を定めよ．

アプローチ まず，分子を有理化することから始めても良いのですが，「x が十分大きいときは $\sqrt{4x^2+x+1}\fallingdotseq\sqrt{4x^2}=2x$ と考えられ，$x\to+\infty$ のときの極限が 0 になるためには，$\sqrt{4x^2+x+1}$ と $ax+b$ の〈最高次の係数〉が一致することが必要，したがって，$a=2$」という予想が立てられるようになったら，少し大人(?!)です．ここでは，

$$\lim_{x\to\infty}F(x) \text{ が存在する} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$$

であることを用いてみましょう．

解答 $F(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-(ax+b)$ とおく．

まず，$\lim_{x\to+\infty}F(x)$ が存在するためには $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$ が必要．

$$\frac{F(x)}{x}=\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)$$

◀ まず，a の値を定めようとしている．

だから，$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=2-a=0$ より　$a=2$

◀ 極限値が存在するための必要条件．

でなければならない．

そこで，$a=2$ を代入し，分子を有理化すると

$$F(x)=\frac{4x^2+x+1-(2x+b)^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x+b}=\frac{(1-4b)+(1-b^2)x^{-1}}{\sqrt{4+x^{-1}+x^{-2}}+2+bx^{-1}}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1-4b}{4}$$

これが 0 に等しくなることより $b=\frac{1}{4}$　$\therefore$　$\boldsymbol{a=2,\ b=\frac{1}{4}}$．

［注］ 1°　上の解答で $a=2$ を代入してから $F(x)$ を計算する際，分子・分母を x で割るところで，

$$\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+x+1}=\sqrt{\frac{1}{x^2}(4x^2+x+1)}=\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \quad \text{つまり}\quad \frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

と計算しているが，このようにしてよいのは，$x\to\infty$ の極限を求めるときには，$x>0$ の範囲で考えるだけで十分だからである．$x<0$ のときは，$|x|=-x$ であるから

$$\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+x+1}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=\frac{|x|}{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

となることに注意が必要である．

2°　$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{4x^2+x+1}-\left(2x+\frac{1}{4}\right)\right\}=0$ は，関数 $y=\sqrt{4x^2+x+1}$ のグラフ（実は，双曲線の一部）が，$x\to\infty$ において直線 $y=2x+1/4$ に漸近することを意味している．

B. 211

つぎの極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

アプローチ (1), (2)ではB. 102と同じように有理化を施します．(3), (4)は，ちょっとした変数の置き換えにより簡単に解決します．

解答 (1)

分子の有理化 ▷

$$\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}=\frac{(1+\tan x)-(1-\tan x)}{\sin x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$\dfrac{\tan x}{\sin x}=\dfrac{1}{\cos x}$ ▷

$$=\frac{2}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\tan x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ であるから，これは $x\to 0$ のとき **1** に収束する．

分母・分子ともに有理化 ▷

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(x-x^2)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}{(-x^2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+1}{1+1}=\mathbf{1}.$$

(3) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと $x\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin t}{t}$ となり，$x\to+\infty$ のとき $t\to 0$ となるので，

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\mathbf{1}.$$

(4) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおけば，$\tan x=-\dfrac{1}{\tan t}$ となり，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ は $t\to 0$ に相当するので

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$ ▷

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to 0}t\left(-\frac{1}{\tan t}\right)$$
$$=-\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cos t$$
$$=\mathbf{-1}.$$

B. 212

つぎの各極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

解答 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

◀ (1)の結果は記憶に値する．

(2) $$\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}$$

$$=\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2\frac{1-\cos z}{z^2}\quad \text{ただし，} z=1-\cos x$$

と書き直せる．$\lim_{x\to 0}z=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2},\quad \text{また}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

したがって，　求める極限値$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{8}}.$

[注]　1°　$|x|$が限りなく小さくなるとき―以後，これを簡単にxが“無限小(infinitesimal)になる”ということにしよう―$\sin x$も無限小になるが，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ すなわち，その比が1に近づくということは，$\sin x$とxが同じ程度に小さいという事実を意味する．一般に，$x\to 0$ のとき，$f(x)\to 0$ となる$f(x)$と，正の定数αについて，

i) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=0$ となるならば，$f(x)$は，x^α より **高位の無限小**

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=k$ (kは0でない定数) となるならば，$f(x)$はx^αと **同位の無限小**

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\infty$ となるならば，$f(x)$はx^αより **低位の無限小**

であるという．ii)のときには，微小な$|x|$に対しては

$$f(x)\fallingdotseq kx^\alpha$$

という近似式が成立することになる．たとえば，$\boxed{\sin x\fallingdotseq x}$

2°　$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ という等式は，　$1-\cos x$ が x^2 と同位の無限小であり，　微小な $|x|$ に対しては，　$1-\cos x\fallingdotseq\frac{1}{2}x^2$　　∴ $\boxed{\cos x\fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2}}$

という近似式が成立することを示唆している．

B. 213

曲線上の点Aにおいてこの曲線と接し，A に近い曲線上の他の点Pを通る円を考え，点Pが点Aに限りなく近づくときのこの円の半径の極限値を（もし存在するならば）この曲線の点Aにおける曲率半径という．

$y=\cos x$ の点 A(0, 1) における曲率半径を求めよ．

解答 曲線 $y=\cos x$ のAにおける接線はx軸に平行であるから，A でこの曲線に接する円の中心はy軸上にある．このような円のうち，A に近い点 $P(t, \cos t)$ を通るものの半径をrとすると，その中心は$(0, 1-r)$となる．よって，次式が成り立つ．

$$t^2+(\cos t-1+r)^2=r^2$$

$$\therefore\quad r=\frac{t^2+(\cos t-1)^2}{2(1-\cos t)}=\frac{t^2}{2(1-\cos t)}+\frac{1-\cos t}{2}$$

P→A に相当して $t\to 0$ の極限をとると，

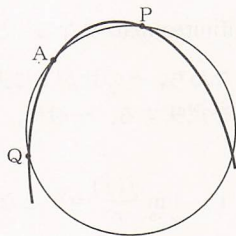
$$\lim_{P\to A} r=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t^2}{2(1-\cos t)}+\frac{1-\cos t}{2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2(1-\cos t)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2\cdot\frac{1+\cos t}{2}=\mathbf{1.}$$

参考 曲線の各点における曲がり具合の大小を数量的に捉えるために，曲線の微小部分を，円で近似しようというのが **曲率円** の考え方である．近似円の半径が小さいほど急な曲がりと考えられるからである．

曲率円（曲率半径，曲率中心）を定義する手法はいろいろあるが，曲線上の 3 点 P，A，Q を通る円を考え，2 点 P，Q を限りなくAに近づけたときの極限を考える（つまり，極限の円は，曲線と点Aで **3 点接触** する）というのが基本である．ただし，この方法では計算が少しまぎらわしいので，まず，A，P，Q を通る円で，Q を限りなくAに近づけたときの極限を考えておいて（この極限の円は，曲線と点Aで接する〈2 点接触〉），ついで，P を限りなく近づけたときの極限円を考えるという手法をとることもある．本問の方法がこれに相当する．

そのほか，A における法線とPにおける法線の交点の，P→A のときの極限点を求める（**曲率中心**）とか，点Aにおいて，1 階および 2 階の微分係数の値が一致する（**2 次接触** する）円を求めるとか，いろいろな方法がある．

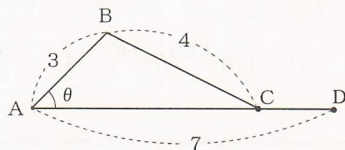
参考までに，なめらかな曲線 $y=f(x)$ の，点(x_0, y_0)における曲率半径 r_0 を求める公式は，　$r_0=\dfrac{\sqrt{1+\{f'(x_0)\}^2}^{\,3}}{|f''(x_0)|}$　で与えられる．証明については ☞ B. 357，曲率中心については ☞ B. 303

B. 214

右図において，

$$AB=3,\ BC=4,\ AD=7$$

で，∠BAC が変化するにしたがって点Cは AD 上を動く．

$\angle BAC=\theta$，$CD=f(\theta)$ とするとき，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$$ を求めよ．

アプローチ $f(\theta)$ を θ の式で表すには AC の長さが θ で表されればよいですね．

解答　$AC=x$ とおき，△ABC に余弦定理を用いると

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\theta$$

$$\therefore\quad 16=9+x^2-6x\cos\theta$$

$$\therefore\quad x^2-6x\cos\theta-7=0. \quad \cdots\cdots①$$

◀ 2解の積 $=-7<0$ より①は，異符号の解をもつ．

x は2次方程式①の正の解として

$$x=3\cos\theta+\sqrt{9\cos^2\theta+7}$$

である．よって，

$$f(\theta)=CD=AD-AC=7-x$$

$$=7-3\cos\theta-\sqrt{9\cos^2\theta+7}$$

$$\therefore\quad \frac{f(\theta)}{\theta^2}=\frac{(7-3\cos\theta)-\sqrt{9\cos^2\theta+7}}{\theta^2}$$

$$=\frac{(7-3\cos\theta)^2-(9\cos^2\theta+7)}{\theta^2(7-3\cos\theta+\sqrt{9\cos^2\theta+7})}$$

◀ 分子の有理化

$$=\frac{42(1-\cos\theta)}{\theta^2(7-3\cos\theta+\sqrt{9\cos^2\theta+7})}.$$

ここで，

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{1}{2}\\ \displaystyle\lim_{\theta\to 0}(7-3\cos\theta+\sqrt{9\cos^2\theta+7})=7-3+\sqrt{16}=8\end{cases}$$

◀ B. 212

であるから，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=42\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\boldsymbol{\frac{21}{8}}.$$

［注］　上の結果より，θ が極めて小さいとき，$f(\theta)\fallingdotseq\dfrac{21}{8}\theta^2$ という近似式が得られたことになる．

B. 215

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を既知として，次式を導け．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$

(ただし，$x>0$)

解答 (1) $1+h=e^x$ とおくと，

$$\left.\begin{array}{l}\log(1+h)=x\\ h=e^x-1\end{array}\right\}\quad\therefore\quad\frac{\log(1+h)}{h}=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1}$$

そして，$h\to0$ のとき $x=\log(1+h)\to0$ だから

$$\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1}=1^{-1}=1.$$

$\left.\dfrac{d}{dx}\log x\right|_{x=1}=1$ ▶ が示された．

(2) $x>0$ なら，十分小さな $|h|$ に対して，$x+h>0$ であるから

$$\log(x+h)-\log x=\log\frac{x+h}{x}=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore\quad\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

となる．ここで，$h\to0$ とすると，$\dfrac{h}{x}\to0$ となるから，(1)より，

右辺の初めの因子は限りなく1に近づく．

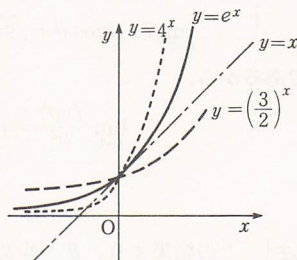
$$\therefore\quad\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}.$$

$\dfrac{d}{dx}\log x=\dfrac{1}{x}$ が証明された． ▶

参考 自然対数の底 e を定義する流儀はいろいろあるが，高校の教科書で最も多く採用されているのが，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ ……(＊) すなわち，指数関数 $y=a^x$ のグラフの，点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが1に等しくなるときの a の値を e とおく，という流儀である．この方法では，そのような a の値が，本当にただ1つ存在するかどうか怪しいという論理的欠点はあるものの，(＊)さえ承認すれば，微分法の重要な公式：

i) $(e^x)'=e^x$

ii) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

がただちに導けるという長所がある．☞ A 2.7 Ⅱ

B. 216

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を既知としてつぎの各極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(3) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

解答　(1)　$\frac{x}{2}=u$ とおくと $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u}=\left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right\}^2$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right\}^2=\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right\}^2=\boldsymbol{e^2}.$

◀ $\lim_{u\to\infty}$ が｛　｝の中に入ることができるのは x^2 の連続性に基づく．

(2)　$-x=t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^t$$

$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$\therefore\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\boldsymbol{e}.$

◀ $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ が分かった．

(3)　$-x=\frac{1}{t}$ とおくと，$(1-x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}$

であり，$x\to 0$ のとき $t\to\pm\infty$ となるが，(2)より

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

であるので，$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}.$

(4)　$\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$x\to\infty$ のとき $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\to e$　$\therefore\ \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\to 0$ だから

$\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\right\}=0$　　$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\boldsymbol{1}.$

B. 217

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ を既知としてつぎの各極限値を求めよ．

(1)　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$　　(2)　$\lim_{x\to+0}x\log x$　　(3)　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$（$n$ は任意の自然数）

解答　(1)　$\log x=t$ とおくと，$x=e^t$　∴　$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{t}{e^t}$ となり，

$x\to\infty$ となるのは，$t\to\infty$ のときであるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}.$$

(2)　$\dfrac{1}{x}=u$ とおくと，$x\log x=\dfrac{1}{u}\log\left(\dfrac{1}{u}\right)=-\dfrac{\log u}{u}$ である．そして，$x\to+0$ となるのは，$u\to\infty$ のときであるから，(1)を用いて

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{u\to\infty}\left\{-\frac{\log u}{u}\right\}=-\lim_{u\to\infty}\frac{\log u}{u}=\mathbf{0}.$$

(3)　$\dfrac{x^n}{e^x}=\left(\dfrac{x}{e^{\frac{x}{n}}}\right)^n$ となるので，まず $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{\frac{x}{n}}}$ を考える．

$\dfrac{x}{n}=X$ とおくと，$\dfrac{x}{e^{\frac{x}{n}}}=n\cdot\dfrac{X}{e^X}$ であり，$x\to\infty$ となるのは

$X\to\infty$ のときであるから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{n}}}=n\lim_{X\to\infty}\frac{X}{e^X}=n\cdot 0=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{n}}}\right)^n=\mathbf{0}.$$

研究　$x\to\infty$ のとき，e^x や $\log x$ も ∞ に発散するが，

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ ………(＊)　　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ ………(＊＊)

という等式は，

“e^x の発散速度は，x のそれと比べてはるかに速い”

“$\log x$ の発散速度は，x のそれと比べてはるかに遅い”

ということを意味している．B. 212 で使った用語をまねれば，e^x は，x より高位の無限大，$\log x$ は x より低位の無限大ということになる．この事実は，$y=e^x$，$y=x$，$y=\log x$ のグラフを考えても納得がゆくかもしれないが，(3)で証明した結果によれば，x どころか，

“どんなに大きな自然数 n をとっても e^x の発散速度は，x^n の発散速度より大きい”

のである．指数関数の発散速度は，まことに想像を絶するほど大きいのである!!

なお，ここで証明の基礎においた(＊)や(＊＊)の証明は，後に扱う．

B.218

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ とする.

つぎの命題のうち，正しいものは証明し，正しくないものについては成立しない例を1つあげよ.

(1) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ ならば $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}}=0$ である.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ ならば $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log g(x)}{\log f(x)}=0$ である.

アプローチ (1)では，$\dfrac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}}=e^{g(x)-f(x)}$ であるから $\lim_{x\to+\infty}\{g(x)-f(x)\}=-\infty$ になるかどうか，(2)では，$\dfrac{\log g(x)}{\log f(x)}=\dfrac{\log(g(x)/f(x))+\log f(x)}{\log f(x)}=\dfrac{\log(g(x)/f(x))}{\log f(x)}+1$ と変形するとよいでしょう.

解答 (1) 正しい：

(証明) $\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(x)$ とおくと，

$$\frac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}}=e^{g(x)-f(x)}=e^{f(x)\{h(x)-1\}} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，仮定より

$x\to+\infty$ のとき $f(x)\to+\infty$, $h(x)\to 0$,

$$\therefore\quad g(x)-f(x)=f(x)\{h(x)-1\}\to-\infty \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}}=0$. ■

(2) 正しくない：

(反例) $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ とすると

$x\to+\infty$ のとき

$$f(x)\to+\infty,\quad g(x)\to+\infty,\quad \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}\to 0$$

であるが，

$$\frac{\log g(x)}{\log f(x)}=\frac{\log x}{2\log x}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\qquad \therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log g(x)}{\log f(x)}\neq 0.$$

◀ $\log f(x)$, $\log g(x)$ が簡単になるものを考えればよい.

[注] $\varphi(x)=e^x$, $\psi(x)=\log x$ は，いずれも，$x\to\infty$ のとき ∞ に発散するが，$\varphi(x)$ の発散の速さは極めて大きく，$\psi(x)$ の発散速度は，極めて小さい. (☞ B.217，研究)

$g(x)$ と $f(x)$ で比べたとき，$f(x)$ の発散速度が $g(x)$ のそれよりもはるかに大きい $\left(\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0\right)$ ならば，(1) $e^{f(x)}$ の発散速度はつねに $e^{g(x)}$ のそれよりはるかに大きいが，(2) $\log f(x)$ が $\log g(x)$ に比べてはるかに大きいとは限らないということになる.

B.219

つぎの各関数を微分せよ.

(1) $y=\sqrt{x}(x-1)$　(2) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

(3) $y=\sqrt{x}\log x$　(4) $y=\dfrac{e^x}{x}$　(5) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

アプローチ 微分法の基本公式の確認です.

解答 (1) $y=\sqrt{x}(x-1)=x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$

▷ 積の微分法を用いてもよい.

▷ $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$$\therefore\quad y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(3x-1)=\boldsymbol{\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}}.$$

▷ 商の微分法の公式

(2) $$y'=\frac{x'(x+1)^2-x\{(x+1)^2\}'}{\{(x+1)^2\}^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3}=\boldsymbol{\frac{1-x}{(x+1)^3}}.$$

(3) $y=x^{\frac{1}{2}}\log x$

▷ 積の微分法

$$\therefore\quad y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x+x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}=\boldsymbol{\frac{\log x+2}{2\sqrt{x}}}$$

▷ 商の微分法を用いてもよい

(4) $y=x^{-1}e^x$

$$\therefore\quad y'=(-1)x^{-2}\cdot e^x+x^{-1}\cdot e^x=\boldsymbol{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}.$$

(5)

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=-\frac{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}=\boldsymbol{\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}}.$$

B.220

つぎの各関数を微分せよ．

(1)　$y=\sin^3 x$　　(2)　$y=\cos 3x$　　(3)　$y=e^{-x^2}$

(4)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$　　(5)　$y=\sqrt{1-x^2}$　　(6)　$y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

アプローチ　合成関数の微分法の基本練習です．この程度の計算では，一々置換の式を書かなくても，すぐに微分できるようにならなければなりません．練習しましょう．

解答　(1)　$y=u^3$，$u=\sin x$ と考えて

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot\cos x=\boldsymbol{3\sin^2 x\cos x}.$$

(2)　$y=\cos u$，$u=3x$ と考えて

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(-\sin u)\cdot 3=\boldsymbol{-3\sin 3x}.$$

(3)　$y=e^u$，$u=-x^2$ と考えて

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot(-2x)=\boldsymbol{-2xe^{-x^2}}.$$

(4)　$y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=1-x$ と考えて

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=\boldsymbol{\frac{1}{2(\sqrt{1-x})^3}}.$$

(5)　$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=1-x^2$ と考えて

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\boldsymbol{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

(6)

$$y=\frac{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^2}{(1+x^2)-(1-x^2)}=\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}{2x^2}$$

◀ 分母の有理化

$$=\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^4}\{(1+\sqrt{1-x^4})'\cdot x^2-(1+\sqrt{1-x^4})(x^2)'\}$$

◀ 商の微分

$$=\frac{1}{x^4}\left\{\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\cdot(-4x^3)x^2-(1+\sqrt{1-x^4})\cdot 2x\right\}$$

$$=\frac{-2}{x^3}\left(\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}+\sqrt{1-x^4}+1\right)=\boldsymbol{-\frac{2}{x^3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\right)}.$$

B.221

つぎの各関数を微分せよ．

(1)　$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$　　(2)　$y=\log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$　　(3)　$y=x^x$ $(x>0)$

アプローチ (1), (2)は $\dfrac{d}{dx}\log f(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ と合成関数の微分法で解決しますが，(3)では公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ を用いて，$(x^x)'=xx^{x-1}=x^x$ (?!) とすることはできません．

解答　(1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$$

$(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ▷

(2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$$

2倍角の公式 ▷

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sin x}}.$$

(3)　$y=x^x$ より $\log y=x\log x$

この両辺を x について微分して，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log x+x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y(\log x+1)=\boldsymbol{x^x\log x+x^x}.$$

[注]　x^x を微分しようとしても，2つの x が絡みあっていて，このままでは微分できそうもないが対数をとると，2つの x が分離できて，微分できるわけである．

もっとも，$x=e^{\log x}$　$\therefore$　$x^x=e^{x\log x}$ と書きかえておけば，

$$(x^x)'=(e^{x\log x})'$$

$$=e^{x\log x}\cdot(x\log x)'$$

$$=e^{x\log x}\left(\log x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\log x+1)$$

と対数をとらなくとも微分できる．

B. 222

$x^2+y^2=5^2$ ……①　のとき，$(x,\ y)=(3,\ -4)$

における $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ．

アプローチ　①だけでは，y は x の関数として確定しません．(実際，$-5<x<5$ なる x の値に対し，対応する y の値が2つある．)　しかし，たとえば $(x,\ y)=(3,\ -4)$ の，ごく近傍だけに話を限定すれば，①により y は x の関数として定まることは図からも分かります．

解答 1　$x^2+y^2=5^2$ ………①

をみたす $(x,\ y)$ のうち，$(x,\ y)=(3,\ -4)$ の近傍では，

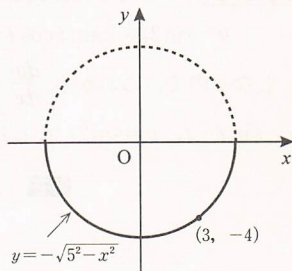
$$y=-\sqrt{5^2-x^2}$$

が成りたつ．

よって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(-\sqrt{5^2-x^2})=-\frac{-2x}{2\sqrt{5^2-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{5^2-x^2}}$$

より，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(3,-4)}=\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}=\mathbf{\frac{3}{4}}.$$

解答 2　$x^2+y^2=5^2$ ………①　の両辺を x で微分すると

◀ 陰関数の微分法

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

◀ y を x の関数と考えている．

よって，　$y\neq0$ に対しては $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ となるので，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(3,-4)}=\mathbf{\frac{3}{4}}.$$

[注]　解答2の方法は y が x の関数であると考えると，①すなわち，$x^2+\{y(x)\}^2=5^2$ が x について恒等式であることになる，という事実に基いている．

また，当然のことながら本問の結果は，点 A(3, -4) における円の接線が原点Oと点Aを結ぶ直線に直交する (傾きの積$=-1$) という事実に合致している．

B.223

媒介変数表示

$$x=\sin t,\ y=\sin 2t \quad (0\leqq t<2\pi)$$

によって定められる x と y について

(1)　$t=\dfrac{\pi}{6}$　　　　(2)　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

のそれぞれにおける $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めよ.

アプローチ　与えられた式から媒介変数 t を消去すると

$$y=\sin 2t=2\sin t\cos t=\pm 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=\pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

となるので，これから $\dfrac{dy}{dx}$ を計算することもできますが，たとえば，媒介変数表示が $x=\sin t+t,\ y=\sin 2t$ ならば消去不可能ですね.

解答　$x=\sin t,\ y=\sin 2t$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos 2t$$

媒介変数表示の微分法.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2\cos 2t}{\cos t} \qquad \cdots\cdots(*)$$

(1)　$(*)$ に $t=\dfrac{\pi}{6}$ を代入して $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cdot(1/2)}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(2)　まず，$\begin{cases}\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \cdots\cdots ① \\ \sin 2t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \cdots\cdots ②\end{cases} \quad (0\leqq t<2\pi)$

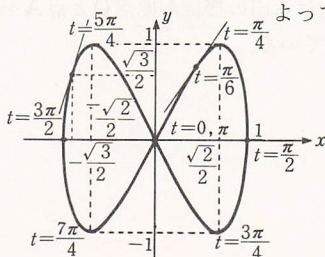
をみたす t の値を求める. ①より

$$t=4\pi/3 \text{ または } 5\pi/3$$

であるが，そのうち，②をみたすのは，前者だけである.

よって，$(*)$ に $t=\dfrac{4\pi}{3}$ を代入して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(-1/2)}{-1/2}=2.$$

[注]　曲線 $x=\sin t,\ y=\sin 2t\ (0\leqq t<2\pi)$ の概形は，左図のようである. 詳しくは☞ B. 315

B. 224

$\begin{cases} x=1-\cos\theta \\ y=\theta-\sin\theta \end{cases}$ のとき次のものを θ で表せ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

アプローチ (1)は前問同様です. (2)では $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の意味, つまり $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ であることを正しく理解してないと[注] 1° にあるような誤りが生じます.

解答 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\boldsymbol{\tan\dfrac{\theta}{2}}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$ ………①　◀ $\dfrac{dy}{dx}$ は θ の関数

$\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ ………②

$\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$ ………③

②, ③を①へ代入して

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\boldsymbol{\frac{1}{\sin\theta(1+\cos\theta)}}.$$

[注]　1°　$x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ ($f(\theta)$, $g(\theta)$ は微分可能で, $f'(\theta)\neq 0$) については,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

である. この公式を「拡張解釈」して, 「$f(\theta)$, $g(\theta)$ が2回微分可能で, $f''(\theta)\neq 0$ なら $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d^2y}{d\theta^2}}{\dfrac{d^2x}{d\theta^2}}$」としてはいけない. 正しくは, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{d^2y}{d\theta^2}\cdot\dfrac{dx}{d\theta}-\dfrac{dy}{d\theta}\cdot\dfrac{d^2x}{d\theta^2}}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^3}$ となる.

証明は, 上の解答と同様である. (ただし, $f(\theta)$, $g(\theta)$ は2回微分可能で, $f'(\theta)\neq 0$ とする.)

2°　本問の媒介変数表示はサイクロイドと呼ばれる曲線を表す. (☞ B. 514)

B. 225

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき，次の極限値を求めよ．

(1)　$L_1=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$　　(2)　$L_2=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

(3)　$L_3=\lim_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}$　　$(a\neq 0)$

アプローチ　微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

は最も基本的な $\dfrac{0}{0}$ の形の不定形です．

解答　(1)　$L_1=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=\boldsymbol{2f'(a)}.$$

▶ $2h=t$ とおけば $h\to 0\Rightarrow t\to 0$ となるので，$L_1=2\times\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$

(2)　$L_2=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$

$$=2f'(a)+f'(a)=\boldsymbol{3f'(a)}.$$

(3)

$$\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2}=\frac{(x^2-a^2)f(a)-a^2\{f(x)-f(a)\}}{x^2-a^2}$$

$$=f(a)-a^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{x+a}$$

▶ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ をぬき出す．

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ であるから

$$L_3=f(a)-a^2\cdot f'(a)\cdot\frac{1}{2a}=\boldsymbol{f(a)-\frac{a}{2}f'(a)}.$$

B. 226

微分可能な関数 $f(x)$ において，$f'(a)\neq 0$ とする．

$$L=\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin f(a)}{e^{f(x)}-e^{f(a)}}$$

を求めよ．

アプローチ これも $\dfrac{0}{0}$ の不定形です．

解答 $F(x)=\sin f(x)$，$G(x)=e^{f(x)}$ とおくと，

$$L=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}}{\dfrac{G(x)-G(a)}{x-a}} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，微分係数の定義と合成関数の微分法の公式とから

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=\cos f(a)\times f'(a) \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\lim_{x\to a}\frac{G(x)-G(a)}{x-a}=G'(a)=e^{f(a)}\times f'(a) \quad\cdots\cdots\cdots ③$$

①，②，③および，$f'(a)\neq 0$ より

$$L=\frac{\boldsymbol{\cos f(a)}}{\boldsymbol{e^{f(a)}}}.$$

［注］ 上の解答と同様にして，つぎの定理が証明できる．

「$f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で微分可能で，

$f(a)=g(a)=0$ かつ $g'(a)\neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ である．」

これは A 6.2 で解説する「ロピタルの公式」の特別の場合に相当する．一般には証明の難しい「ロピタルの公式」も，この場合だけなら易しい．

なお，本問は $f'(x)$ の連続を仮定すれば，平均値の定理を用いても解決できる．すなわち，

$$\begin{cases}\sin f(x)-\sin f(a)=(\cos f(x_1))f'(x_1)(x-a)\\ e^{f(x)}-e^{f(a)}=e^{f(x_2)}f'(x_2)(x-a)\end{cases}$$

(x_1，x_2 は a と x の間の値)

と表せるので

$$\frac{\sin f(x)-\sin f(a)}{e^{f(x)}-e^{f(a)}}=\frac{\cos f(x_1)\cdot f'(x_1)}{e^{f(x_2)}\cdot f'(x_2)}$$

$x\to a$ とすると，$x_1\to a$，$x_2\to a$ なので

$$\frac{\cos f(x_1)}{e^{f(x_2)}}\cdot\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} \longrightarrow \frac{\cos f(a)}{e^{f(a)}}\cdot\frac{f'(a)}{f'(a)}=\frac{\cos f(a)}{e^{f(a)}}$$

(A 6.2 で述べるコーシーの平均値の定理を用いれば，(i)の x_1，x_2 は，$x_1=x_2$ とできる．)

B.227

つぎの各極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-3}{x^2+x-2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{x-[x]}$，$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{x-[x]}$

ただし，$[x]$ は x をこえない最大の整数である．

アプローチ 片側極限（A 2.5）に関する基本練習です．

解答 （1） $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}$

ここで，

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{2}{3},\ \lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

であるから，

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x-3}{x^2+x-2}=-\infty.$$

▶ $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x-3}{x^2+x-2}=+\infty$ となる．

（2） $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-0}t=-\infty$ だから

$$\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t}.$$

$$=\frac{1}{1+\displaystyle\lim_{t\to-\infty}e^t}=\frac{1}{1+0}=1.$$

▶ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ となる．

（3） $\displaystyle\lim_{x\to2-0}$ では，x は2より小さい方から2に近づくのだから，$1<x<2$ としてよい．

▶ もちろん，もっと狭く "$1.5<x<2$" や "$1.9<x<2$" と考えてもよい．

$1<x<2$ では $[x]=1$ であるから，

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{x-[x]}=\lim_{x\to2-0}\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{0}{1}=0.$$

また，$2<x<3$ では $[x]=2$ であるから，

$$\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{x-[x]}=\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+0}(x+2)=4.$$

B.228

$x \neq 0$ においてつぎの各式で与えられる関数は $x=0$ における関数値を適当に定義して，$x=0$ で連続にすることができるか．

(1)　$f(x)=\dfrac{|x+1|-1}{x}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{[x]}{x}$　　(3)　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$

アプローチ　関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとは，$\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在し，それが $f(0)$ に等しいということです．直観的なイメージは $x=0$ でグラフがつながっているということですが(3)のように原点付近で無限回振動するような，グラフが見えない関数についてはそのイメージは通用しません．

解答　**(1)**　$x=0$ の近くでは $x+1>0$ であるから

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

したがって，$f(0)=1$ と定義すれば $x=0$ で連続となる．

(2)　$\begin{cases} -1<x<0 \text{ では } [x]=-1 \\ 0<x<1 \text{ では } [x]=0 \end{cases}$　より

$$\begin{cases} \lim_{x\to -0}\dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to -0}\dfrac{-1}{x}=+\infty \\ \lim_{x\to +0}\dfrac{[x]}{x}=\lim_{x\to +0}\dfrac{0}{x}=0 \end{cases}$$

となるので，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．

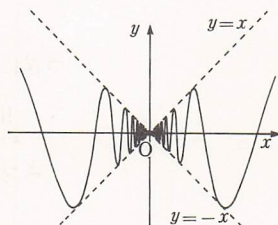
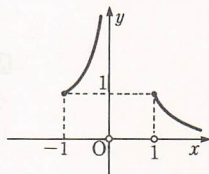
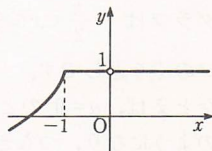
よって，$f(0)$ をどのように定めても $x=0$ で連続にすることはできない．

(3)　$x \neq 0$ では $|f(x)|=|x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x| \to 0$ $(x\to 0)$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}|f(x)|=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

ゆえに，$f(0)=0$ と定めれば，$f(x)$ は $x=0$ で連続となる．

［注］　上の(1)，(3)のように，適当に関数値を定義することによって不連続性が解消できる場合の不連続点を除去可能な (removable) 不連続点という．

B.229

関数 $f(x)$ は

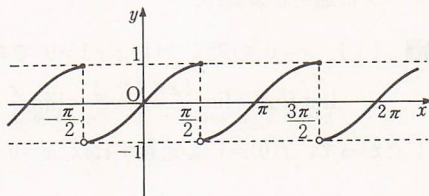
(i) $-\dfrac{\pi}{2}<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $f(x)=\sin x+ax$

(ii) 任意の x に対して $f(x+\pi)=f(x)$

をみたす関数として与えられている．

このf(x)が，すべての x に対して連続な関数となるには，定数 a をどんな値にすればよいか．

アプローチ 条件(ii)によって $f(x)$ は周期 π の周期関数であり，$y=f(x)$ のグラフは $-\dfrac{\pi}{2}<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲のグラフのくり返しです．

たとえば，$a=0$ のときのグラフは右のようになり，つなぎ目で不連続です．

解答 条件(ii)は $f(x)$ が周期 π の周期関数であることを意味している．そこで，まず(i)，(ii)より，$f(x)$ の値がすべての x の実数値に対して定められていることがわかる．

条件(i)より，a の値が何であっても $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ では $f(x)$ は連続関数である．よって，周期性(ii)を考慮すると，

$$x=\frac{\pi}{2} \text{ で } f(x) \text{ が連続} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

であることが，すべての x に対し $f(x)$ は連続となるための必要十分条件である．

(＊)となる条件は ▶ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

まず，(i)より

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x+ax)=1+\frac{\pi a}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

つぎに，周期性を考えに入れると，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}(\sin x+ax)=-1-\frac{\pi a}{2}$$

よって求める条件は

$$1+\frac{\pi a}{2}=-1-\frac{\pi a}{2} \qquad \therefore \quad a=-\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}.$$

B.230

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$ とする．

(1) $f(x)$ は，$x=0$ において連続であるばかりか微分可能でもあることを示せ．

(2) $f'(x)$ は，連続か否か調べよ．

アプローチ 関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとは，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が (有限確定値として) 存在するということです．

解答 **(1)** $h\neq 0$ とすると，$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=h\sin\dfrac{1}{h}$

◀ $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{h^2\sin\dfrac{1}{h}-0}{h}$

である．ここで

$$\left|h\sin\frac{1}{h}\right|=|h|\left|\sin\frac{1}{h}\right|\leqq|h|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

に注意すると，

$$\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

であり，これは，$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であり

$f'(0)=0$ であることを意味する．■

◀ 微分可能だからもちろん連続である．☞ A 2.6

(2) $x\neq 0$ のときは，微分法の公式により

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad となる．$$

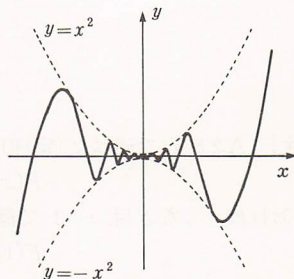
$x\neq 0$ においては $f'(x)$ は連続である．

一方，$x\to 0$ とすると，$x\sin\dfrac{1}{x}$ は $(*)$ と同様に 0 に近づくが，

$\cos\dfrac{1}{x}$ は，-1 と 1 の間を振動して，極限値をもたない．

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ が存在しない．

ゆえに，**$f'(x)$ は，$x=0$ で不連続である．**

[注] $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．
$x=0$ で連続ではあるが，原点付近では無限に激しく振動している．このような関数は，ときとして，我々の素朴な連続性のイメージを打ちこわす逆説的振舞いを演ずる．

B. 231

関数 $f(x)$ を

(i)　$x \leqq 1$ では $f(x)=e^x$

(ii)　$x>1$ では $f(x)=a\sin\pi x+b$

で定義する．

この関数 $f(x)$ が，つなぎ目 $x=1$ でも微分可能となるように定数 a, b の値を定めよ．

☞ A 2.7 Ⅲ　▶　**解答**　微分可能であるためには，まず連続でなければならない．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)より} & f(1)=\lim_{x\to1-0}f(x)=e \\ \text{(ii)より} & \lim_{x\to1+0}f(x)=a\sin\pi+b=b\end{array}\right\}$$

だから

$$f(x)\text{ が } x=1 \text{ で連続，つまり } f(1)=\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)$$

となるのは，$b=e$　のときである．

ついで，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)より} & x<1 \text{ では } f'(x)=e^x \\ \text{(ii)より} & x>1 \text{ では } f'(x)=\pi a\cos\pi x\end{array}\right\}\text{ であるから，}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{d}{dx}e^x\Big|_{x=1}=e \\ \displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{d}{dx}(a\sin\pi x+b)\Big|_{x=1}=\pi a\cos\pi=-\pi a\end{cases}$$

である．そこで，

$$f(x)\text{ が } x=1 \text{ で微分可能となる}$$

のは，

$$e=-\pi a$$

のときである．

以上から求める a, b の値は　$\boldsymbol{a=-\dfrac{e}{\pi}}$, $\boldsymbol{b=e}$　である．

［注］ A 2.8 Ⅴ で述べた（定理）を利用すると

$$F(x)=e^x,\ \ G(x)=a\sin\pi x+b$$

とおけば，つなぎ目 $x=1$ で微分可能となる条件は，

$$F(1)=G(1) \text{ かつ } F'(1)=G'(1)$$

となる．これから a, b の値を求めることもできるが，上では定義に戻った解を示した．

B.232

「$f(x)$が区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数のとき，$f(a) \neq f(b)$ であれば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値kに対して，

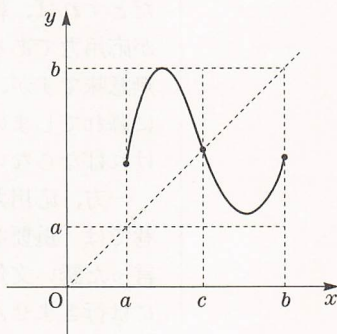
$$f(c)=k$$

となる数cが $a<x<b$ の範囲に存在する」という連続関数についての中間値の定理を用いて，つぎを証明せよ．

$a<b$ とする．$f(x)$は区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数で，$a \leqq f(x) \leqq b$ であるならば，

$$f(c)=c \text{ かつ } a \leqq c \leqq b \quad \cdots\cdots(*)$$

をみたすcが存在する．

アプローチ グラフを描けば，(*)を満たすcの存在が直観的に了解されますが，これでは証明になりません．

解答 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $a \leqq f(x) \leqq b$ なのだから，

$$a \leqq f(a) \leqq b, \quad a \leqq f(b) \leqq b$$

である．

(i) $f(a)=a$ ならば $c=a$ が(*)に適する．

(ii) $f(b)=b$ ならば $c=b$ が(*)に適する．

◀ (i)，(ii)の場合は別扱いしなければならない．

(iii) 上の(i)，(ii)以外の場合，すなわち

$$a<f(a) \text{ かつ } f(b)<b$$

の場合には

$F(x)=f(x)-x$ とおけば，$F(x)$は $a \leqq x \leqq b$ で連続関数であり，

$$\begin{cases} F(a)=f(a)-a>0 \\ F(b)=f(b)-b<0 \end{cases}$$

であるから，$F(c)=0$，すなわち $f(c)=c$ をみたすcが $a<x<b$ 内に存在する．

◀ 中間値の定理

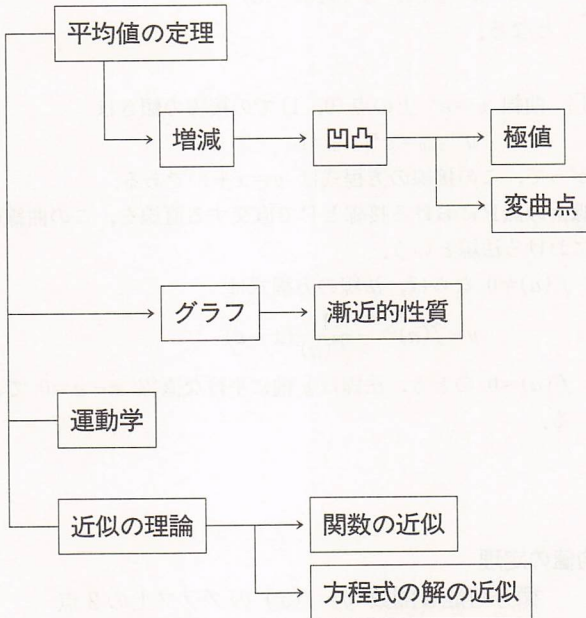
以上から，(*)をみたすcがつねに存在する．■

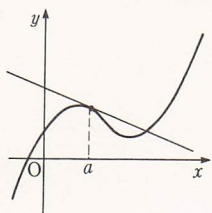
Repos

基礎はなぜ大切か

「基礎が大切」とよく言われます．しかし，応用できなければ意味がないのも事実ですから，基礎の大切さを強調する言葉に，つい疑問を差し挟みたくなるというものです．

見知らぬ土地で道に迷ったとき，私達は大きな道路や鉄道の駅を探します．そして，「ここまで来れば，あとは大丈夫」と思います．この「あとは大丈夫」が基礎の力です．即ち，道路を整備し鉄道を張り巡らすことが，基礎力をつけることだとすれば，幹線道路や鉄道の駅に何とかしてたどり着く力が応用力であると言えるでしょう．応用できなければ基礎は無意味ですが，基礎がなければ，私達は見知らぬ土地で途方に暮れてしまいます．だから私達は，系統的に基礎を学ばなければならないのです．

一方，応用力をつけるための系統的な方法は存在しません．巷では「重要な道路の見つけ方」や「便利な駅の探し方」と言った誘い文句が耳をくすぐりますが，それらを信じるわけには行きません．例えば，「山で道に迷ったら川筋に沿って下りよ」という教えがありますが，水は低きに流れるので確かに一理あるとはいうものの，その道の先は滝と崖かも知れません．我身を救うものは，鋭い感覚と判断力，そして試行錯誤しかなく，またこの様な力を培うには，結局自分の足で歩くほかありません．訓練に耐える「知的体力」と，散策を楽しむ「知的余裕」が必要とされるゆえんです．

A 3.1　接線と平均値の定理

I．接　線

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，曲線 $y=f(x)$ の上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ である．したがって，その点における接線の方程式は

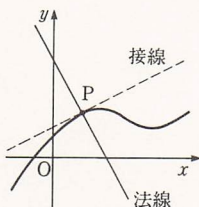
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

となる．

1°　例　曲線 $y=e^x$ 上の点 $(0,\ 1)$ での接線の傾きは

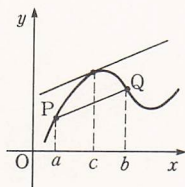
$$y'|_{x=0}=e^x|_{x=0}=1$$

したがって，この接線の方程式は $y=x+1$ である．

2°　曲線上の点Pにおける接線とPで直交する直線を，この曲線の点Pにおける法線という．

$f'(a)\neq 0$ ならば，法線の方程式は

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$f'(a)=0$ のとき，法線は y 軸に平行な直線 $x-a=0$ である．

II．平均値の定理

微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフ上の2点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$，$\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ を結ぶ直線を平行移動することにより，左図のように $y=f(x)$ の接線の1つ l と一致させ得ることがわかる．

正確に言うと，

平均値の定理

［定理］　$a\leqq x\leqq b$ で連続，$a<x<b$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対し，次のような数 c が少なくとも1つ存在する．

$$\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\\ a<c<b\end{cases}$$

1°　これを平均値の定理という．その証明には意外に深い知識を要する．☞ A 6.1

2°　定理中の c がどこにあるのか，いくつあるのかという問いに対して，この定理は情報を与えてくれない．それにもかかわらず，「少なくとも1つ存在すること」を根拠にして，重要ないくつかの定理が証明される(次節以降)．

A 3.2　関数の増減と凹凸

I．増　減

次のよく知られた事実は，平均値の定理を根拠にしている．

増　減

[定理]
(i)　$f'(x)>0$ である区間で，$f(x)$ は増加する．
(ii)　$f'(x)<0$ である区間で，$f(x)$ は減少する．

1°　正確に言えば，(i)は次のようになる．

$$f'(x)>0 \quad (\alpha \leqq x \leqq \beta) \quad \text{のとき}$$
$$\alpha \leqq a < b \leqq \beta \Longrightarrow f(a)<f(b)$$

が成立する．

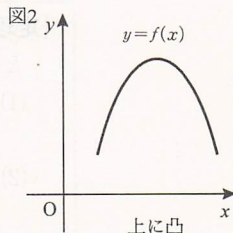
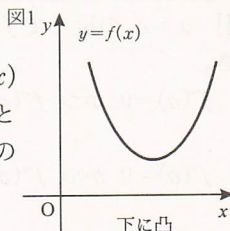
2°　**(i)の証明：**　上の　1°の記号を用いると，平均値の定理により

$$\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \\ a<c<b \end{cases}$$

なる c が存在する．仮定により $f'(c)>0$ であるから

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0 \qquad \therefore \quad f(b)-f(a)>0$$

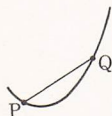
II．凹凸

$f'(x)$ が増加するとき，$y=f(x)$ のグラフは図1のように下に凸となり，$f'(x)$ が減少するとき図2のように上に凸となる．

1°　「下に（上に）凸」の意味は，前のページの図については一目瞭然だろうが，数学的な定義の方法は，実はそれほど単純ではない．

本書では，$f'(x)$ の増加をもって，ある関数（またはグラフ）が下に凸であることの定義とする．

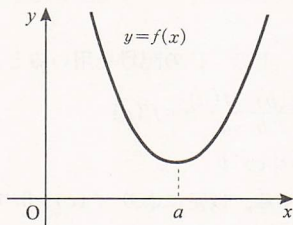
2°　ある区間で $f'(x)$ が増加するとき，すなわち関数 f が下に凸ならば，次のことが成立する．（証明は ☞ B.1019）

(i)　曲線 $y=f(x)$ のこの区間における部分は，この区間内の任意の点における接線の上方にある．

(ii)　曲線 $y=f(x)$ 上の2点P，Qを結ぶ線分は，曲線 $y=f(x)$ のP，Qの間の部分の上方にある．

実は，上記の(i)や(ii)を「下に凸」の定義とする流儀もある．

Ⅲ．極　値

微分可能な関数は，$f'(x)$ が正から負に変わるとき極大となり，負から正に変わるとき極小となる．（☞「大学への数学II ニューアプローチ」A 4.9）

1°　1点 $x=a$ で $f'(x)$ が0になるというだけでは，極大極小を判定できない．しかし，「$x=a$ の近くで下に凸」という前提の下で考えると，下図のように，「$f'(a)=0 \Longrightarrow x=a$ で極小」と判定できる．

次の定理は，上記の考察を一歩進めたものである．

極値の判定

［定理］　$x=a$ の近くで $f''(x)$ が存在して連続のとき，

(1)　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0 \Longrightarrow f(x)$ は $x=a$ で極小

(2)　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0 \Longrightarrow f(x)$ は $x=a$ で極大

1° (1)の**証明**： $f''(x)$ の連続性と $f''(a)>0$ とから，十分小さい正数 ε に対し

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \text{ でつねに } f''(x)>0$$

が成立する．$f''(x)=(f'(x))'$ であるから，前小節の定理によって

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon \text{ で } f'(x) \text{ は増加関数}$$

となる．これと $f'(a)=0$ とを合せ考えると

$$\left.\begin{array}{l} a-\varepsilon<x<a \text{ で } f'(x)<0 \\ a<x<a+\varepsilon \text{ で } f'(x)>0 \end{array}\right\}$$

が導かれ，$f(a)$ が極小値であることがわかる．

IV．変 曲 点

曲線の凹凸の変わり目を変曲点という．すなわち

> **[定義]** $y=f(x)$ のグラフ上の１点Ｐの左右で $f'(x)$ の増減が変化するとき，Ｐを変曲点という．

変曲点

1° 例 曲線 $y=x^3$ において，原点はその変曲点である．

2° 「変曲点」は f'' を使わずに定義されている．実際，$f''(\alpha)$ が存在しなくても，$(\alpha,\ f(\alpha))$ が変曲点となることがある．

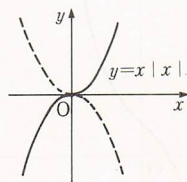
例 $f(x)=x|x|$ とすると

$$x>0 \text{ では } f''(x)=2,\quad x<0 \text{ では } f''(x)=-2$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} x>0 \text{ で } f(x) \text{ は下に凸} \\ x<0 \text{ で } f(x) \text{ は上に凸} \end{array}\right\}$$

であって，$(0,0)$ は $y=f(x)=x|x|$ の変曲点である．

だが，$x=0$ のとき $f''(x)$ は存在しない．

3° $f''(x)$ が存在するとき，点Ｐが変曲点であるための必要十分条件は，点Ｐの左右で，$f''(x)$ の符号が変わることである．

> **[定理]** $f''(\alpha)$ が存在するとき，
> $$(\alpha,\ f(\alpha)) \text{ が変曲点} \Longrightarrow f''(\alpha)=0$$

変曲点の必要条件

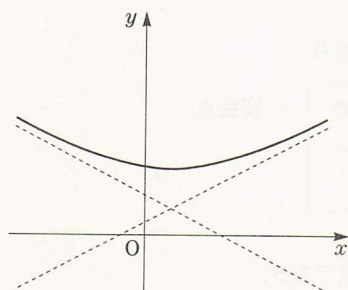
1° この定理の逆は成立しない．

例 $f(x)=x^4$ とすると $f''(x)=12x^2$．

$f''(0)=0$ であるが，点 $(0,\ 0)$ は $y=x^4$ の変曲点ではない．

A3.3　関数のグラフ

I．関数 $f(x)$ が与えられたとき，コンピュータなどを使って数値的にグラフを描くという方法がある．しかし，微分法を用いると，グラフの特徴をとらえて，その概形を描くことができる．増減，凹凸は，グラフの重要な特徴であるが，その他に「漸近的性質」と呼ばれる特徴に着目すべき場合がある．

II．漸近的性質

$y=f(x)$ のグラフが y 軸に平行でない漸近線 $y=ax+b$ をもつとき，

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$$

（$x\to\infty$ で漸近するとき）

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0$$

（$x\to-\infty$ で漸近するとき）

が成立する．

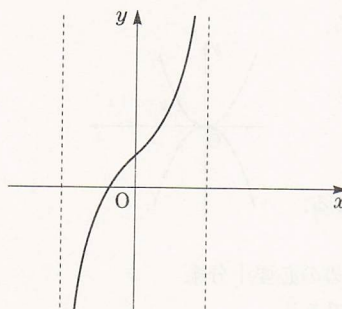
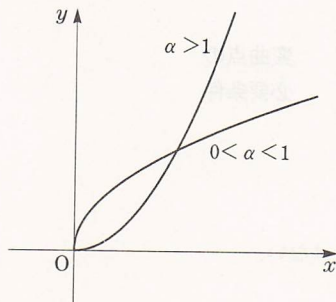
また y 軸に平行な漸近線 $x=c$ をもつとき

$$\lim_{x\to c+0}|f(x)|=\infty$$

（右から漸近するとき）

$$\lim_{x\to c-0}|f(x)|=\infty$$

（左から漸近するとき）

が成立する．

さらにグラフの端点付近の様子なども，極限値を用いて調べることができる漸近的性質の一つである．

1°　例　$f(x)=x^\alpha$ $(x\geqq 0)$ のグラフは，

$\alpha>1 \Longrightarrow$ 原点で x 軸に接する．

$0<\alpha<1 \Longrightarrow$ 原点で y 軸に接する．

これは原点における接線の傾き

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}x^{\alpha-1}=\begin{cases}0 & (\alpha>1)\\ \infty & (0<\alpha<1)\end{cases}$$

から分かる．

Ⅲ．グラフの重要な特徴

グラフを描く上で通常必要とされる特徴は，次の3種類に分類される．

(1)　微分的性質……増減，凹凸，特異な点（微分できない点）の存在

(2)　漸近的性質……漸近線，端点や特異な点の付近の様子

(3)　対称的性質……線対称性，点対称性，周期性

Ⅳ．グラフから分かること

(1)　最大・最小問題は微分法の最も魅力的な応用の1つであるが，十分正確なグラフを前提とするなら，もはや目の問題に過ぎない．

(2)　不等式 $f(x)>0$ に関する問題の答えを，グラフから読みとることができる場合がある．理論的計算と幾何的直観の組合せが有効である．

(3)　方程式 $f(x)=0$ についても，グラフの効用は不等式と同様であるが，特に n 次方程式に関しては，

$x=\alpha$ は $f(x)=0$ の重解である

$\Longleftrightarrow$　$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

$\Longleftrightarrow$　$y=f(x)$ のグラフは $(\alpha,\ 0)$ で x 軸に接する

という「因数分解」「微分法」「グラフの幾何的性質」の間の密接な関係に注意しておきたい．（☞B.353）

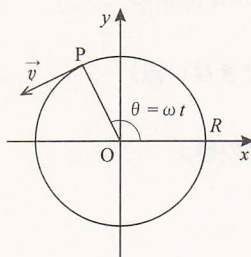
A 3.4　運動学と微分法

時間とともに変化する現象の分析は微分（積分）法の最も得意とする問題の1つである．

xy 平面上を運動する点Pの時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ とすると，Pの速度と加速度は，次のように定義される．

Pの速度　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$

Pの加速度　$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

例　図のように，中心O，半径Rの円 $x^2+y^2=R^2$ の上を運動する動点Pの座標が

$$\begin{cases} x=R\cos\omega t \\ y=R\sin\omega t \end{cases} \quad (\omega \text{は正の定数})$$

で表される場合を考える．ωt はx軸の正の向きから動径OPが回転した角θを表している．

θは時間tと共に一定の割合ωで増加する．一般に，このような運動を **等速円運動** という．ωは その **角速度** である．

このとき

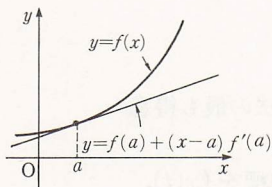
$$\begin{cases} \vec{v}=(-\omega R\sin\omega t,\ \omega R\cos\omega t) & \perp\ \overrightarrow{OP} \\ \vec{a}=(-\omega^2 R\cos\omega t,\ -\omega^2 R\sin\omega t) & /\!/\ \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

となり，速度，加速度の大きさは

$$\begin{cases} |\vec{v}|=\omega R \\ |\vec{a}|=\omega^2 R \end{cases}$$

で与えられる．

A3.5　近似の理論

I．関数の近似

曲線の接線は，接点の近くで，その曲線をよく近似する直線である．

いま$f(x)$が $x=a$ の近くで微分可能であるならば，xがaに近いとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+(x-a)f'(a) \quad \cdots\cdots ①$$

という近似式の成り立つことが期待される．

実際，近似式①の誤差

$E=f(x)-\{f(a)+(x-a)f'(a)\}$ に対しては，

$$\frac{E}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a) \to 0 \ (x\to a)$$

が成り立つから，誤差Eは $x-a$ に比べて小さな量である．

1°　近似の誤差Eに関する信頼できる評価や，高次多項式による近似法については ☞ A 6.3

2°　例　aは任意の定数とする．

hが0に近い数ならば，近似値

$$(1+h)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha h$$

が成り立つ．その誤差はh^2の程度である．

($f(x)=x^{\alpha}$，$a=1$ として①を用いる)

II. 方程式の解の近似

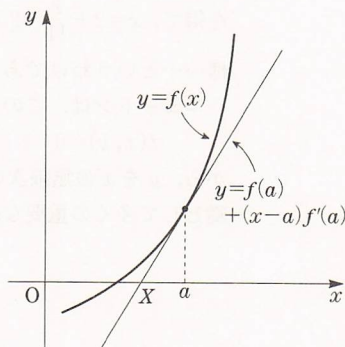
方程式

$$f(x)=0$$

の $x=a$ に近い実根(実数解)は，上記のIの考え方によれば，近似方程式

$$f(a)+(x-a)f'(a) \fallingdotseq 0$$

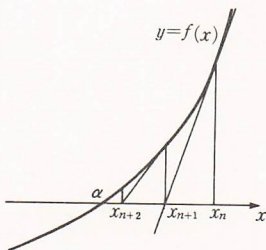
の解

$$X=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

によって良く近似されるであろう．ただし $f'(a) \neq 0$ とする．

そこで，このステップをくり返し，

$$\begin{cases} x_1=a \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって数列$\{x_n\}$を定める．

右図を見れば，数列$\{x_n\}$が $f(x)=0$ の実数解αに収束していくことが予想される(実際そうなることが多い)．このようにして方程式の実根の近似値を求める方法を **ニュートン法** と呼ぶ．ニュートン法は，解を厳密に求めることが困難な場合に，その近似値を数値的に得る方法として，応用上きわめて重要である．

1°　具体的な例については ☞ B.363

2°　ニュートン自身の元々のアイデアは，次のようなものであった．たとえば，

$$x^3-x-8=0$$

を解くのに，まず，x の近似値としてまず $x=2$ をとり，真の値を $2+\alpha$ とおいてこれを代入し

$$(2+\alpha)^3-(2+\alpha)-8=0$$

$$\therefore\quad -2+11\alpha+6\alpha^2+\alpha^3=0$$

を導いた後，「α は微小だから，α^2，α^3 を無視して」

$$\alpha=\frac{2}{11}$$

を得て，$x=2+\dfrac{2}{11}\fallingdotseq 2.1818$ が，より良い近似値を与える，以下同様……というわけである．

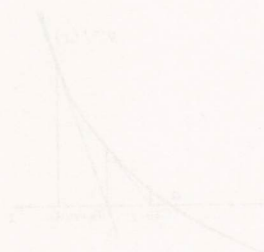
ニュートンは，この方法を駆使して，陰関数

$$f(x, y)=0$$

から，y を x の無限次の多項式（べき級数）として表し，それを基礎として多くの重要な結果を発見したのであった．

☞ B.366

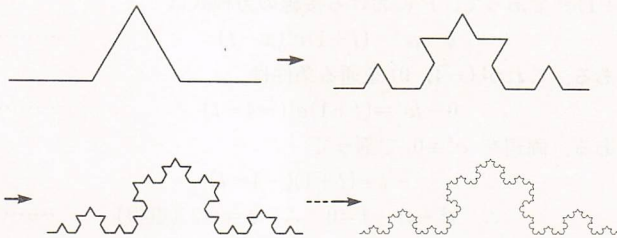
——A 3　おわり——

Repos

微分ってなに？

微分とは何でしょう．「x^2 を $2x$ にすること」「式の次数を下げて計算を楽にすること」などと言ってはいけません．微分とは超高性能の顕微鏡を使って物の形を無限に拡大することです．微分を勉強したあなたは「無限に拡大する」という意味がピンときますか？

たとえば放物線を考えましょう．これは文字どおり「曲線」であり曲っています．さて放物線を顕微鏡で見てみましょう．倍率を上げるにしたがって，曲っていた線は次第にまっすぐにのびてほとんど直線と区別がつかなくなるでしょう．この直線がすなわち接線です．微分は接線を求める方法と言ってもいいですから，この意味で微分とは曲線の一部分を無限に拡大することなのです．

それではどんな曲線も無限に拡大すれば直線になってしまうでしょうか．下図のようにして描かれる折れ線の極限の「曲線」はどんなに拡大してももとの曲線と同じ複雑さをもっています．このような図形をフラクタルといいます．雪の結晶や複雑な海岸線を思わせる形ですね．

微分積分学は，自然の法則を調べるのに欠かすことはできません．無限に拡大すると直線になるという描像は自然のある本質をとらえています．しかし，どんなに拡大してももとの複雑さを失わないという性質もまた自然の本質のひとつなのです．

B.301

曲線 $y=\sqrt{1+\sin x}$ 上の $x=\pi$ に相当する点Pでの接線および法線の方程式を求めよ．

解答 まず，$y|_{x=\pi}=\sqrt{1+\sin\pi}=1$ であるから，

$$\mathrm{P}(\pi,\ 1)$$

である．ついで

$$y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} \quad \therefore \quad y'|_{x=\pi}=\frac{\cos\pi}{2\sqrt{1+\sin\pi}}=-\frac{1}{2}$$

で，これが求める接線の傾きである．

よって，接線は $y-1=-\frac{1}{2}(x-\pi)$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}$$

法線はPを通りこれに垂直な直線で

$$y-1=2(x-\pi) \quad \therefore \quad \boldsymbol{y=2x+(1-2\pi)}$$

B.302

点 $(-4,\ 0)$ から

曲線 $y=xe^x$

に引いた接線の方程式を求めよ．

解答 $y=xe^x$ より，$y'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)e^x$．

したがって，曲線上の点 $\mathrm{P}(t,\ te^t)$ での接線の傾きは $(t+1)e^t$ であって，Pにおける接線の方程式は

$$y-te^t=(t+1)e^t(x-t) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．これが $(-4,\ 0)$ を通る条件は

$$0-te^t=(t+1)e^t(-4-t) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．両辺を $e^t \neq 0$ で割って

$$-t=(t+1)(-4-t)$$

$$\therefore \quad t^2+4t+4=0 \quad \therefore \quad t=-2 \text{（重根）} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

③を①に代入して

$$y+2e^{-2}=-e^{-2}(x+2)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=-e^{-2}(x+4)}$$

▶ $(-4,\ 0)$ を通る傾き $(t+1)e^t$ の直線を $y=(t+1)e^t(x+4)$ が接点 $(t,\ te^t)$ を通る条件から②を導いてもよい．

B.303

放物線 $y=x^2$ 上の2点P，Qにおける法線の交点Rの，Pを固定し，QをPに限りなく近づけるにつれて近づく極限の位置をNとする．

Pとしてこの放物線上の各点を考えるとき，Nの軌跡の方程式を求め，その概形をえがけ．

解答　$P(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q(\beta,\ \beta^2)$ とする．

$y=x^2$ より $y'=2x$．

よって，Pにおける法線の方程式として

$$2\alpha(y-\alpha^2)=-(x-\alpha)$$

$$\therefore\quad x+2\alpha y-2\alpha^3-\alpha=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を得る．

同様に，$Q(\beta,\ \beta^2)$ における法線は

$$x+2\beta y-2\beta^3-\beta=0. \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②を連立し，$\alpha \neq \beta$ に注意して x，y について解くと，Rの座標 $(x_R,\ y_R)$ が得られる：

$$x_R=-2\alpha\beta(\alpha+\beta),$$

$$y_R=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+(1/2).$$

◀ 各自，確かめよ．

ここで，$\beta\to\alpha$ とすると，Nの座標 $(X,\ Y)$ として

$$X=-4\alpha^3,$$

$$Y=3\alpha^2+(1/2)$$

が得られる．これから α を消去すると，

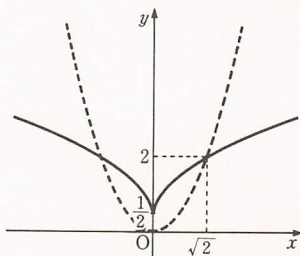
$$Y=3(\sqrt[3]{X/4}\,)^2+(1/2)$$

◀ $\alpha=-\sqrt[3]{\dfrac{X}{4}}$ をYの式に代入．

となる．よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2}}$$

この曲線の概形は右図のようになる．

曲線は y 軸に関し対称で，点 $(0,\ 1/2)$ で y 軸に接している．また，放物線 $y=x^2$ とは2点 $(\pm\sqrt{2},\ 2)$ で交わっている．

研究　弧PQが円弧ならP，Qにおける法線の交点は円の中心である．一般の曲線の弧PQは円弧ではないが，微小な部分なら，円弧で近似できると考えて，その近似円の中心を求めたわけである．B.213で用いた用語にならえば，Nは，Pにおける曲率円の中心(**曲率中心**)ということになる．

B. 304

つぎの各関数の増減を調べ，極大，極小を与えるxの値を求めよ．

$y=\sin x(1+\cos x)$，定義域：$0\leqq x<2\pi$

解答　$y'=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$　　◀ $\cos x$ に統一する．

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

まず，$\cos x+1\geqq 0$ である．

(等号は $x=\pi$ で成立)

また，$0\leqq x<2\pi$ では

$$\cos x=\frac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{3} \text{ または } x=\frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x>\frac{1}{2} \iff 0\leqq x<\frac{\pi}{3} \text{ または } \frac{5\pi}{3}<x<2\pi$$

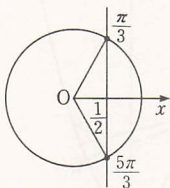
◀ 以上で，$\cos x<\frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$ もいえた．

以上から，右の増減表をうる．

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↘		↗	

◀ $x=\pi$ で $y'=0$ だが極大でも極小でもない．

(答)　極大値を与えるのは $x=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

極小値を与えるのは $x=\boldsymbol{\frac{5\pi}{3}}$

注意　$y'=0$ となるxの値を求めるだけでは，増減表は作れない！

B.305

関数 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2-x+1}$ の極小値を求めよ．

解答　分母は0にならぬから，$f(x)$ はすべての x に対して定義された微分可能な関数であり，

◀ x^2-x+1
$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$$f'(x)=\frac{4(x^2-x+1)-(4x+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{4x^2+6x-7}{(x^2-x+1)^2}$$

より $f'(x)$ は $-(4x^2+6x-7)$ と同符号である．よって，$f(x)$ が極小，すなわち，$f'(x)$ が－から＋に変わるのは

$$4x^2+6x-7=0 \text{ の小さい方の解 } \frac{-3-\sqrt{37}}{4}=\alpha$$

の前後においてである．

$f'(x)$ の分子の計算をみると，$f'(x)=0$ となる $x=\alpha$ に対しては

$$4(\alpha^2-\alpha+1)=(4\alpha+3)(2\alpha-1)$$

◀ $f'(\alpha)=0$ を利用して $f(\alpha)$ の計算をラクにしようとしている．

したがって　$f(\alpha)=\dfrac{4\alpha+3}{\alpha^2-\alpha+1}=\dfrac{4}{2\alpha-1}$

となるから

$$\text{極小値}=f(\alpha)=\frac{4}{2\alpha-1}=\frac{-8}{5+\sqrt{37}}=\boldsymbol{\frac{10-2\sqrt{37}}{3}}$$

[注]　極小値を実直な計算で求めるのはタイヘンである．α が $4\alpha^2+6\alpha-7=0$ を満たす値であったことを利用すると，

$$\alpha^2-\alpha+1=\frac{1}{4}(4\alpha^2+6\alpha-7)-\frac{5}{2}\alpha+\frac{11}{4}=-\frac{5}{2}\alpha+\frac{11}{4}$$

となるので，少なくとも分母における α^2 の計算は避けられる．

しかし，上の解答のように $\alpha^2-\alpha+1=\dfrac{1}{4}(4\alpha+3)(2\alpha-1)$ を利用すると，さらに簡単に計算できるのである．

上で用いたテクニックを一般化する：

$F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ において $F'(\alpha)=0$ $(v(\alpha)\neq 0,\ v'(\alpha)\neq 0)$ ならば

$u'(\alpha)v(\alpha)-u(\alpha)v'(\alpha)=0$ であるから

$F(\alpha)=\dfrac{u(\alpha)}{v(\alpha)}=\dfrac{u'(\alpha)}{v'(\alpha)}$

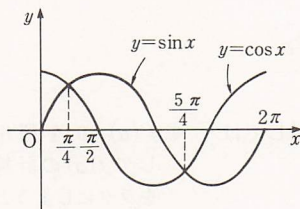
となる．この関係は，分数関数の極大値，極小値を計算するのに便利である．

B.306

つぎの各関数の極大値，極小値を求めよ．

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos x\sin x}{\cos x+\sin x}$　　　(2)　$g(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$

周期2πの周期関数だから，幅が2πの区間で調べれば十分である． ▶

解答　(1)　$0\leqq x<2\pi$ で考えれば十分である．

分母が0となる $x=\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ 以外のxに対しては

$$f'(x)=\frac{\cos^3x-\sin^3x}{(\cos x+\sin x)^2}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos^2x+\cos x\sin x+\sin^2x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$
$$=\frac{2+\sin 2x}{2(\cos x+\sin x)^2}(\cos x-\sin x)$$

$$f'(x)=0\iff\cos x=\sin x$$
$$\iff x=\frac{\pi}{4}\ \text{または}\ x=\frac{5}{4}\pi$$
$$f'(x)>0\iff\cos x>\sin x$$
$$\iff 0\leqq x<\frac{\pi}{4}\ \text{または}\ \frac{5}{4}\pi<x<2\pi$$

以上を考慮すると増減表は下のようになる．

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗		↗	

(答)　極大値$=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，極小値$=f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$

この$g'(x)$の表式からは$g'(x)$の符号はわかりにくい． ▶

(2)　$g'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$

$g''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x$

ここで，任意のxに対して

$$e^x+e^{-x}\geqq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2\geqq 2\cos x$$

$g''(x)$の符号はわかりやすい．それを利用して$g'(x)$の符号をみる． ▶

∴　任意の $x\neq 0$ に対して $g''(x)>0$．

したがって，$g'(x)$はxの増加関数である．

そして，$g'(0)=0$ である．それゆえ，

$x<0$ では $g'(x)<0$，$x>0$ では $g'(x)>0$

がいえる．これから

(答)　$x=0$ で極小値4，極大値はない．

B. 307

つぎの各曲線の増減，凹凸を調べて，その概形をかけ．

また，変曲点での接線も図に書き込め．

(1)　$y=x^4-4x^3$　　　(2)　$y=\dfrac{4x}{x^2+1}$

解答　(1)　$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$y''=12x^2-24x=12x(x-2)$

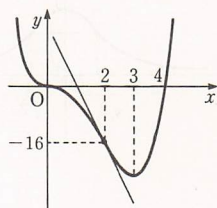
これより増減，凹凸は右の表のようになる．

x		0		2		3	
y'	−	0	−		−	0	+
y''	+	0	−	0	+		+
y	↘	0	⤵	−16	↘	−27	⤴

ただし，ここで，↘，↗および⤴，⤵は，それぞれ下に凸で減少，増加，および上に凸で増加，減少を表す．

これより変曲点は$(0,\ 0)$，$(2,\ -16)$であって，$(0,\ 0)$での接線はx軸である．

また，$y'|_{x=2}=-16$ より$(2,\ -16)$での接線は

$y=-16x+16$ である．

y軸方向を縮めて描いた．

(2)　$y'=\dfrac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$$y''=-4\cdot\frac{2x(x^2+1)^2-(x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

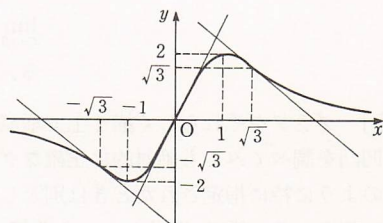
奇関数だから，$x\geqq 0$ の範囲で増減，凹凸の表を作ると，右のようになる．

x	0		1		$\sqrt{3}$	
y'		+	0	−		−
y''	0	−		−	0	+
y	0	⤴	2	⤵	$\sqrt{3}$	↘

変曲点$(0,\ 0)$，$(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$における接線の傾きは

$$y'|_{x=0}=4,\quad y'|_{x=\sqrt{3}}=-1/2$$

である．

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=0$ より，$x\to\infty$ でx軸に漸近する．

注意　変曲点での接線を引いて，その左右で曲線と接線の上下が入れ替わることに注意すると，変曲点附近のグラフの概形がよりそれらしく描ける．

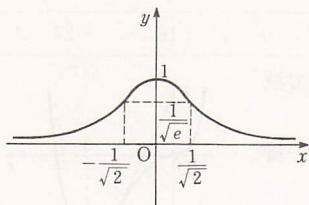
B.308

つぎの各曲線の概形を描け．増減だけでなく，凹凸も調べよ．必要なら，$\lim_{x\to 0} x\log x=0$ を利用してよい．

(1)　$y=e^{-x^2}$　　　(2)　$y=x\log x$

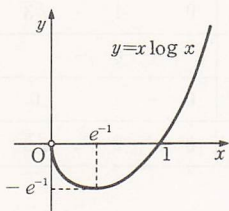
解答　(1)　$y'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2}$

$$y''=-2e^{-x^2}-2xy'=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

偶関数だから，$x\geqq 0$ の範囲で，増減・凹凸を表にまとめよう．

x	0		$1/\sqrt{2}$	
y'		$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	1	↘	$1/\sqrt{e}$	↘

しかも，$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$ だから，グラフは，$x\to\infty$ で x 軸に漸近する．よって，グラフは，左図のようである．

(2)　$y'=1\cdot\log x+x\cdot x^{-1}=\log x+1$

$$y''=\frac{1}{x}>0$$

x	(0)		e^{-1}		(∞)
y'	$(-\infty)$	$-$	0	$+$	(∞)
y''		$+$		$+$	
y	(0)	↘	$-e^{-1}$	↗	(∞)

$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0} x\log x=0$ より左端で原点に近づくが，$\lim_{x\to +0} y'=-\infty$ だから，ここで曲線は y 軸に接している．

［注］　グラフをそれらしく描く上で増減や凹凸を調べることは大切なポイントだが，増減や凹凸を調べてみても絶対的に正確なグラフを描くことはどのみち不可能であるから，本問のように特に指定されたときは別として，凹凸の状況を仔細に調べずにグラフを描くことも許される．増減・凹凸といった曲線の局所的な性質よりも，むしろ，定義域・値域，あるいは対称性や漸近線などの大域的な性質を調べることの方が，グラフを描く上で大切なのである．☞ A 3.3，B. 310

B.309

つぎの各曲線の変曲点を求めよ.

(1)　$y=x^4$　　(2)　$y=x|x|$　　(3)　$y=\dfrac{x^4-1}{x^3}$

解答　(1)　$y'=4x^3$，$y''=12x^2$

$x=0$ において $y''=0$ となるが,

$x<0$ において $y''>0$ であって，y は下に凸,

$x>0$ においても $y''>0$ であり，y は下に凸 である.

よって,　　　　(答)　変曲点はない.

(2)　$y=\begin{cases} x^2 \cdots\cdots\cdots x\geqq 0 \\ -x^2 \cdots\cdots\cdots x\leqq 0 \end{cases}$ より

◀ $y'|_{x=0}$ は，導関数を求める公式では計算できない.
☞[注]

$$y'=\begin{cases} 2x \cdots\cdots\cdots x>0 \\ -2x \cdots\cdots\cdots x<0 \end{cases}$$

$$\therefore\ y''=\begin{cases} 2 \cdots\cdots\cdots x>0 \\ -2 \cdots\cdots\cdots x<0 \end{cases}$$

であるから,

$x<0$ において $y''<0$，グラフは上に凸
$x>0$ において $y''>0$，グラフは下に凸

しかも，$x=0$ において y は連続であるから,

(答)　変曲点は (0, 0)

(3)　$y=x-x^{-3}$，$y'=1-(-3x^{-4})=1+3x^{-4}$

$$y''=-12x^{-5}=\frac{-12}{x^5}$$

よって,

$x<0$ において $y''>0$，y は下に凸
$x>0$ において $y''<0$，y は上に凸

となり，$x=0$ を境い目として凹凸が変化するが，$x=0$ で y は不連続である.

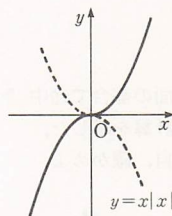
よって，$x=0$ でも変曲点にはならない.

(答)　変曲点はない.

[注]　(2)の y について，$y'|_{x=0}$ の値は，微分係数の定義にさかのぼって求めると

$$\lim_{h\to+0}\frac{h^2-0}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{(-h^2)-0}{h}=0$$

より，$y'|_{x=0}=0$

ゆえに y は $x=0$ でも微分可能で y' は連続である．しかし y'' については，

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{2h-0}{h}=2$，$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{(-2h)-0}{h}=-2$ となることから，$y''|_{x=0}$ は定義できない．つまり，曲線 $y=x|x|$ は，$x=0$ で変曲点をもつが，$y''|_{x=0}=0$ ではないのである！　よく「$(\alpha, f(\alpha))$ が変曲点 $\Longleftrightarrow$ $f''(\alpha)=0$」と気楽に考えがちだが，以上(1)，(2)の結果からわかるように $f''(\alpha)=0$ は，$(\alpha, f(\alpha))$ が変曲点であるための必要条件でも十分条件でもない！　☞ A 3.2 IV

なお，(3)で示したように y が不連続な点は，凹凸の変わり目であっても変曲点ではない．

B. 310

つぎの各関数について，増減，凹凸，漸近線などを調べて，グラフの概形を描け．

(1)　$f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$　　(2)　$g(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$　　(3)　$h(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

解答　**(1)**　まず，$f(-x)=-f(x)$，すなわち，$f(x)$ は奇関数であり，$y=f(x)$ のグラフは原点対称である．

紙面の都合で途中の計算を略した．各自，確かめよ．▶

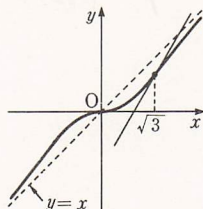
$$f'(x)=\frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=\frac{-2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

より，x によらず $f'(x)\geqq 0$ で，$f(x)$ は増加関数．

$f(0)=f'(0)=0$ より原点で x 軸に接している．

また，$x=0$，$\pm\sqrt{3}$ で $f''(x)$ が符号変化するので，これらは変曲点の x 座標である．

割算して $f(x)=x-\dfrac{x}{1+x^2}$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=0$

となり，直線 $y=x$ が漸近線である．

(2)　$g(x)$ は奇関数で，$y=g(x)$ のグラフは原点対称．

各自，確かめよ．▶

$x=\pm1$ で分母が 0 となるので，$x=\pm1$ でグラフは不連続．

$$g'(x)=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2},\quad g''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

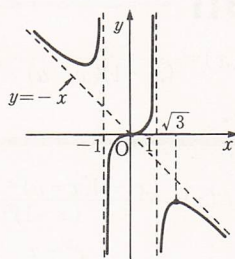
x	0		1			$\sqrt{3}$	
$g'(x)$	0	+			+	0	−
$g''(x)$	0	+			−		−
$g(x)$	0	↗	$(+\infty)$	$(-\infty)$	↗	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘

$x\to 1$，または $x\to -1$ のとき $|g(x)|\to\infty$ となるから，

直線 $x=\pm 1$ は漸近線

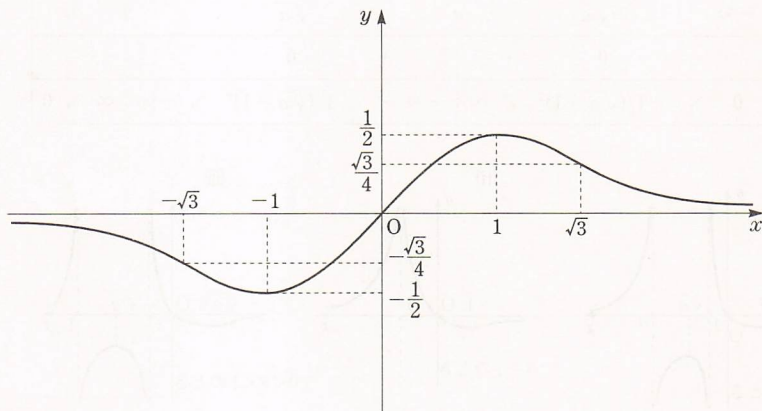
であり，また

$$g(x)=-x+\frac{x}{1-x^2}$$

より，$\lim_{x\to\infty}\{g(x)-(-x)\}=0$ となり，直線 $y=-x$ が漸近線．

（3）　$h(x)$ は奇関数で，$y=h(x)$ のグラフは原点対称．分母は決して 0 にならない．

$$h'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},\quad h''(x)=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3},$$

また $\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=0$ より，$h(x)$ の増減表は下の通り．

x	$(-\infty)$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		(∞)
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	(0)	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	(0)

B. 311

$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-a)}$ とする．$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，$a>0$ とする．

解答　$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-a)-x\{2x-(a+1)\}}{(x-1)^2(x-a)^2}$

$=-\dfrac{x^2-a}{(x-1)^2(x-a)^2}=-\dfrac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{(x-1)^2(x-a)^2}$

$f'(x)$ の分子を 0 とする x の値 $\pm\sqrt{a}$ と分母を 0 とする x の値 1，a の大小に注目して

(i)　$a>1$　(ii)　$a=1$　(iii)　$0<a<1$　の各場合に分類する．

(i)

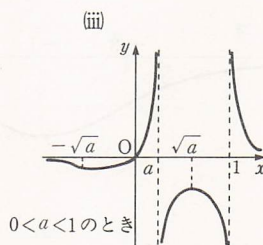
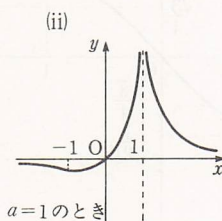
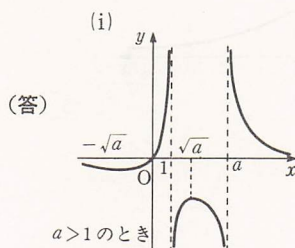
x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		1		$\sqrt{a}$		a		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-1/(\sqrt{a}+1)^2$	↗	∞ | $-\infty$	↗	$-1/(\sqrt{a}-1)^2$	↘	$-\infty$ | ∞	↘	0

(ii)

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-1/4$	↗	∞ | ∞	↘	0

(iii)

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		a		$\sqrt{a}$		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	↘	$-1/(\sqrt{a}+1)^2$	↗	∞ | $-\infty$	↗	$-1/(\sqrt{a}-1)^2$	↘	$-\infty$ | ∞	↘	0

（答）

［注］　a が変化するにつれてグラフの形状は少しずつ連続的に変化してくるのだが，$a=1$ の場合（(ii)）に劇的な変貌を遂げる．

B.312

(1)　$y=x^3\log x$　　　(2)　$y=\dfrac{x}{\log x}$　の各関数のグラフを描け．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=0$ を用いてよい．

解答　(1)　$y'=3x^2\log x+x^3\cdot x^{-1}=3x^2(\log x+1/3)$

$y''=6x\log x+3x^2\cdot x^{-1}+2x=6x(\log x+5/6)$

定義域 $x>0$ において増減・凹凸は下表のようになる．

x	(0)		$e^{-5/6}$		$e^{-1/3}$	
y'		−		−	0	+
y''		−	0	+		+
y	(0)	↘		↘		↗

しかも，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}x^3\log x=0$，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=3\lim_{x\to+0}x^2\log x+\lim_{x\to+0}x^2=0$

だから，曲線は，原点で x 軸に接する．

(2)　まず，$x=1$ のとき分母が 0 となるので，$x=1$ では定義されないが，$\displaystyle\lim_{x\to1}|y|=\infty$ より，直線 $x=1$ が漸近線．

$y'=\dfrac{\log x-1}{(\log x)^2}$，$y''=\dfrac{2-\log x}{x(\log x)^3}$ より，

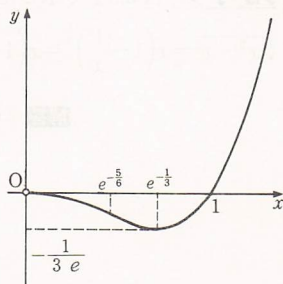
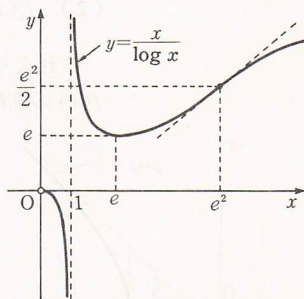
◀ 各自，確かめよ．

x	(0)		1		e		e^2		(∞)
y'	(0)	−		−	0	+		+	
y''		−		+		+	0	−	
y	(0)	↘		↘	e	↗	$e^2/2$	↗	(∞)

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\left(\lim_{x\to+0}x\right)\left(\lim_{x\to+0}\frac{1}{\log x}\right)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y'=\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right)=0$

より，曲線は左端で原点に近づき，そこで x 軸に接する形になる．

また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=+\infty$ より右遠方ではいくらでも上昇していく．

⬆ 上図は右の方を少し縮めてある．$e\fallingdotseq2.7$，$e^2\fallingdotseq7.3$ である．

B. 313

$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ とする．

(1) $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+a)\}=0$ をみたす a の値を求めよ．また，この a の値に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x+a$ との交点を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをえがけ．

アプローチ A 3.5 I で示した考え方を利用すれば，x が十分大きいとき，

$\sqrt[3]{x^3-x^2}=x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\fallingdotseq x\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)=x-\dfrac{1}{3}$ であるから，$a=-\dfrac{1}{3}$ と予想がつきます．

解答 (1) $f(x)-(x+a)$

$$=\frac{(x^3-x^2)-(x+a)^3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3-x^2}(x+a)+(x+a)^2}$$

$$=\frac{-(1+3a)x^2-3a^2x-a^3}{\sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4}+\sqrt[3]{x^3-x^2}(x+a)+(x+a)^2}\quad\cdots\cdots①$$

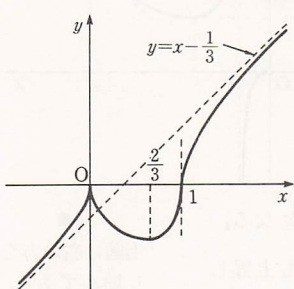
$$=\frac{-(1+3a)-3a^2x^{-1}-a^3x^{-2}}{\sqrt[3]{1-2x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt[3]{1-x^{-1}}(1+ax^{-1})+(1+ax^{-1})^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+a)\}=\frac{-(1+3a)}{1+1+1}=0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{3}}.$$

また，$y=f(x)$ と $y=x+a$ $(a=-1/3)$ との交点の x 座標は，①の分子$=0$ とおいて，$x=1/9$ となる．

よって，交点は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{9}},\ \boldsymbol{-\dfrac{2}{9}}\right)$

(2) $f'(x)=\dfrac{3x^2-2x}{3(x^3-x^2)^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{3x-2}{3x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$

これより $f(x)$ は連続であるが，$f'(x)$ は $x=0,\ 1$ で定義されず，$f(x)$ の増減表は下のようになる．

x		0		$\frac{2}{3}$		1	
$f'(x)$	+		−	0	+		+
$f(x)$	↗	0	↘		↗	0	↗

極大値$=f(0)=0$，極小値$=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

そして，(1)の結果より

$y=x-\dfrac{1}{3}$ が漸近線である．

また，$\lim_{x\to0}|f'(x)|=\infty$，$\lim_{x\to1}|f'(x)|=\infty$

より，$y=f(x)$ は $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で y 軸に平行な接線をもつ．

B. 314

曲線 $C: y^2=3x^2-x^3$ の概形をえがけ．

解答　y について解くと $y=\pm x\sqrt{3-x}$

よって，　$f(x)=x\sqrt{3-x}$

とおけば，曲線 C は，$y=f(x)$ と $y=-f(x)$ の2関数のグラフを合わせたものである．

この両者は x 軸に関し対称だから，まず，$y=f(x)$ を調べる．

(1)　定義域：　$x^2(3-x)\geqq 0$ より $x\leqq 3$.

(2)　増減：　$f'(x)=\dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$

$$\begin{cases} x<2 \text{ で } f'(x)>0,\ f(x) \text{ は増加} \\ 2<x<3 \text{ で } f'(x)<0,\ f(x) \text{ は減少.} \end{cases}$$

(3)　凹凸：　$f''(x)=\dfrac{3(x-4)}{4(\sqrt{3-x})^3}$

$x<3$ でつねに $f''(x)<0$ であり，$f(x)$ は上に凸．

◀ あわてて，$x=4$ のとき変曲点としてはいけない．

(4)　定義域の端の点：

$\lim_{x\to 3-0} f'(x)=-\infty$ であるから

$y=f(x)$ は右端 $(3,\ 0)$ で y 軸に平行な接線をもつ．

◀ 端の点付近を特に調べることも大切．

(5)　x 軸との交点：

$x=0,\ 3$ で x 軸と交わり，

$f'(0)=\sqrt{3}$ より，原点での接線は

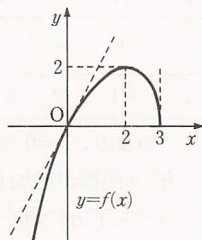
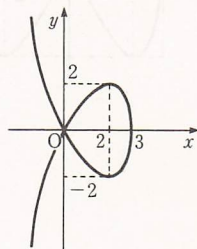
$y=\sqrt{3}\,x$.

以上から，$y=f(x)$ は右図のようになる．

曲線 $y=f(x)$ に，これを x 軸に関して裏返して得られる曲線 $y=-f(x)$ をつけ加えると求める曲線になる．

(6)　つなぎ目と交点：

右端の $(3,\ 0)$ では $y=\pm f(x)$ がともに y 軸に平行な接線をもっているので，なめらかにつながる．

原点で $y=\pm f(x)$ は交わり，交角は $60°$ である．以上のことから曲線 C は，右のような曲線となる．

⬆ ループをもつ曲線である．

B.315

時刻 t における動点Pの座標は

$$x=\cos\pi t,\qquad y=\sin 2\pi t$$

で与えられているとする．

動点Pの軌跡の概形をえがけ．

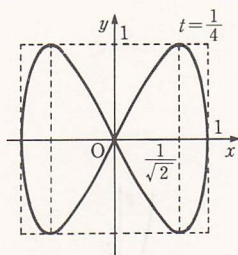
アプローチ 媒介変数表示された曲線はわざわざ，媒介変数を消去しなくともそのままの形で概形を考える方が簡単なことが多い．

解答 まず，周期2の周期運動だから $0\leqq t\leqq 2$ で調べればよい．さらに

$$(\cos\pi(t+1),\ \sin 2\pi(t+1))=(-\cos\pi t,\ \sin 2\pi t)$$

より軌跡全体は，$0\leqq t\leqq 1$ における軌跡とこれを y 軸に関して裏返したものから成る．

t	0		1/4		3/4		1
$\frac{dx}{dt}$		−		−		−	
x	1	↘	$1/\sqrt{2}$	↘	$-1/\sqrt{2}$	↘	−1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	−	0	+	
y	0	↗	1	↘	−1	↗	0

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\pi\sin\pi t\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2\pi\cos 2\pi t\\ \quad =2\pi(2\cos^2\pi t-1)\\ \quad =4\pi\left(\cos\pi t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\pi t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

つまり，$t=0$ のとき，点 $(1,\ 0)$ を出発して x 座標が減少（左方）y 座標が増加（上方）する方向に点 $(1/\sqrt{2},\ 1)$ まで移動．ついで左下方に点 $(-1/\sqrt{2},\ -1)$ まで．そして今度は，左上方へ点 $(-1,\ 0)$ まで移動する．

また，$t=1/2$ のとき，$x=y=0$．すなわち原点を通り，

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1/2}=-\left.\frac{2\cos 2\pi t}{\sin\pi t}\right|_{t=1/2}=2$$ だから，原点で，直線 $y=2x$ に接する．

さらに，$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{t=1}=0$ だから，点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ で y 軸に平行な接線をもつ．

以上よりPの軌跡は左図のようになる．

［注］　この図形はリサジュー（Lissajous）図形と呼ばれるものの1つである．

B. 316

原点Oを中心とする半径 $r\,(r>1)$ の定円 C_0 に，半径1の円Cが内接しながらすべらずに回転する．円Cの周上に固定された点Pがあり，C の中心が点B$(r-1,\ 0)$ にあるときは，ちょうど接点 A$(r,\ 0)$ の位置にあるものとする．

$r=3$ の場合に円Cが円 C_0 内を一周するとき，点Pの描く曲線の概形を描け．

アプローチ うまいパラメータをとってPの座標を表さなくてはなりません．

解答 円Cの中心QがOのまわりに正の向きに θ 回転した場合を考え，2円の接点をRとおくと，

すべらずに回転する

という条件から

円 C_0 の弧 AR の長さ＝円Cの弧 RP の長さ

であり，$\angle\mathrm{AOR}=\theta$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を負の向きに 3θ 回転したものである．

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\,(\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ は x 軸から θ 回転した方向にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は，結局，x 軸から

$$\theta+(-3\theta)=-2\theta$$

回転した方向にある．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}\cos(-2\theta)\\ \sin(-2\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ -\sin 2\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}2\cos\theta+\cos 2\theta\\ 2\sin\theta-\sin 2\theta\end{pmatrix}$$

ゆえに，P$(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases}x=2\cos\theta+\cos 2\theta\\ y=2\sin\theta-\sin 2\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta-2\sin 2\theta\\ \qquad=-2\sin\theta(2\cos\theta+1)\\ \dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta-2\cos 2\theta\\ \qquad=2(2\cos\theta+1)(1-\cos\theta)\end{cases}$$

θ	0		$2\pi/3$		π		$4\pi/3$		2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
x	3	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	3
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	0
y	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

となるので，θ の値にともなって，x，y は右表のように変化する．

$\dfrac{dx}{d\theta}\neq 0$ となる θ に対して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\bigg/\frac{dx}{d\theta}=\frac{1-\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=-\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}=-\tan\frac{\theta}{2}$$

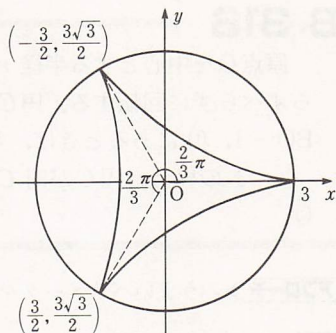
であるから

$$\lim_{\alpha\to\frac{2}{3}\pi}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha}=-\sqrt{3},\quad \lim_{\alpha\to\frac{4}{3}\pi}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha}=\sqrt{3},$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\alpha}=0$$

だから，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\theta=\dfrac{4\pi}{3}$，$\theta=0$ に対応する点で，

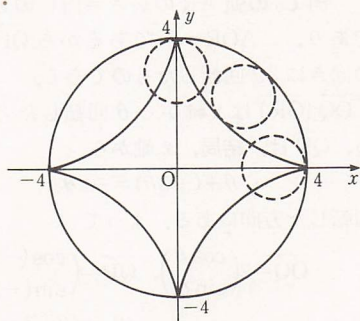
それぞれ傾き，$-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，0 の直線に接する．

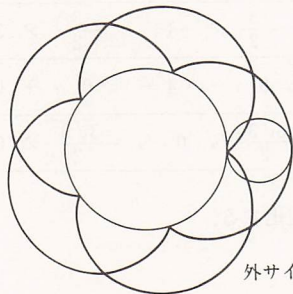
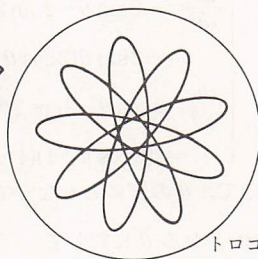
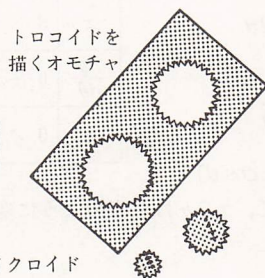
よって，点Pの描く図線の概形は，右図のようになる．

研究　直線上をすべらず回転する円の周上の点の描く軌跡である **サイクロイド** (cycloid) は有名だが，本問のように与えられた円の内側をすべらずに回転する円周上の点の軌跡も **内サイクロイド** と呼ぶ．外側の円の半径を r，内側の動円の半径を 1 とすると，内サイクロイドは

$$\begin{cases} x=(r-1)\cos\theta+\cos(r-1)\theta \\ y=(r-1)\sin\theta-\sin(r-1)\theta \end{cases}$$

とパラメータ表示される．特に $r=4$ のときは

$$\begin{cases} x=3\cos\theta+\cos 3\theta=4\cos^3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta=4\sin^3\theta \end{cases}$$

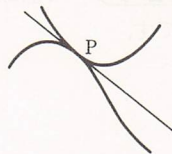
となり，有名な星芒形（アステロイド）(asteroid) と一致する．

一方，外側をすべらずに回転する円周上の点の描く軌跡を外サイクロイドという．

因みに，軌跡を描かせる点を，動円の周上でなく，円の内部にとったときにできる曲線は **トロコイド** (trocoid) と呼ばれる．

B. 317

$0 \leqq x < 2\pi$ の区間において，2 曲線

$y=2\sin x$ ………①，　$y=a-\cos 2x$ ………②

が接するように定数 a の値を定めよ．

アプローチ 2曲線が点Pで接するとは，Pを共有し，かつPにおける接線が一致することです．

解答 ①より $y'=2\cos x$，②より $y'=2\sin 2x$ だから，
①，②の接点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とすると，

$$\beta=2\sin\alpha=a-\cos 2\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$2\cos\alpha=2\sin 2\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

が成りたつ．④より

◀ 倍角の公式

$$\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore\ \cos\alpha=0,\ \text{または}\ \sin\alpha=1/2 \quad \cdots\cdots\cdots ④'$$

$0 \leqq \alpha < 2\pi$ で④′をみたす α は

$$\alpha=\pi/2,\ 3\pi/2,\ \pi/6,\ 5\pi/6$$

これらを③に代入して　$a=\mathbf{1},\ \mathbf{-3},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

◀ $\alpha=\pi/6,\ 5\pi/6$ のときどちらも $a=3/2$ となる．

B. 318

2 曲線　$y=\log(2x+3)$ ………①，　$y=a-\log x$ ………②

が直交するように定数 a の値を定めよ．

アプローチ 2曲線が点Pで直交するとは，Pで交わり，かつPにおける2曲線の接線が直交することです．

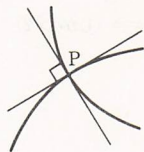
解答 ①より $y'=\dfrac{2}{2x+3}$，②より $y'=-\dfrac{1}{x}$ であるから，
①，②の直交する交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ とすると，

$$\beta=\log(2\alpha+3)=a-\log\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\left(\frac{2}{2\alpha+3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

◀ 2接線の傾きの積 $=-1$

が成りたつ．④より $2\alpha^2+3\alpha-2=0$　$\therefore\ (2\alpha-1)(\alpha+2)=0$

$\alpha>0$ だから $\alpha=\dfrac{1}{2}$　これを③に代入し $a=\mathbf{\log 2}$

[注]　a の値を導くだけなら③，④より $a=\log\alpha(2\alpha+3)=\log 2$ としても良さそうだが，③，④をみたす α の存在を確かめておきたい．

B. 319

(1) 2曲線 $x^2-y^2=2$, $xy=3$ は直交していることを示せ.

(2) 2曲線 $x^2-y^2=2$, $x^2+2xy-y^2=8$ は, 45° の角で交わっていることを示せ.

アプローチ 2曲線が, 角 α で交わるとは, 交点における両者の接線が角 α で交わることです.

解答 (1) $x^2-y^2=2$ ………①, $xy=3$ ………② を連立.

②より $y=\dfrac{3}{x}$ ……②′ として①に代入すると $x^2-\dfrac{9}{x^2}=2$

$$\therefore \quad x^4-2x^2-9=0.$$

▶ x^2 についての2次方程式.

この方程式は, 正・負あわせて実根を2つもち, この値を②′に代入すると, y の実数値が定まる. したがって, 曲線①と曲線②は, 異なる2点を共有する.

さて, ①の両辺を x で微分すると $2x-2yy'=0$. ……①′

また, ②の両辺を x で微分すると $y+xy'=0$. ……②′

①′, ②′ より, 共有点 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ における

①の接線の傾き $m_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$, ②の接線の傾き $m_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

$$\therefore \quad m_1m_2=-1.$$

よって, ①, ②の共有点Pでの2接線は直交している. ■

(2) $x^2-y^2=2$ ………①, $x^2+2xy-y^2=8$ ………③

を連立し, ③−① を作ると $xy=3$ ………② をうる.

▶ ①かつ③ ⟺ ①かつ②

よって, 2曲線①, ③の交点は(1)で扱った2曲線①, ②の交点と一致する.

③の両辺を x で微分すると

$$2x+2(y+xy')-2yy'=0$$

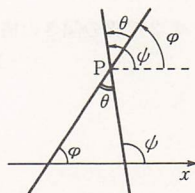
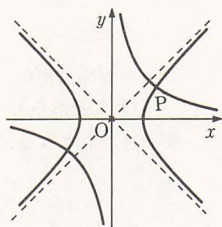
$$\therefore \quad (y-x)y'=x+y.$$

これより, 交点 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ における

③の接線の傾き $m_3=\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}$.

そこで, Pでの①, ③の接線と x 軸とのなす角を φ, ψ とし, $\theta=\psi-\varphi$ とおくと

$$m_1=\tan\varphi, \quad m_3=\tan\psi$$

$$\therefore \quad \tan\theta=\tan(\psi-\varphi)=\frac{m_3-m_1}{1+m_1m_3}$$

これに m_1 と m_3 の値を代入して計算すると

$$\tan\theta=1=\tan 45°$$

ゆえに，2 曲線①と③は，45° で交わる．■

◀ 分母分子ともに $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta(\beta-\alpha)}$ となる．

［注］ (1)の結論は，α，β の値を求めずに導けた．したがって，一般に 2 曲線 $x^2-y^2=a$，$xy=b$ は，交わるならば，必ず直交する．(2)でも同様である．

B. 320

曲線 $y=f(x)=\dfrac{1}{\cos x}-x$ 上の $f(x)$ を極小とする点は 1 直線上にあることを示し，その直線の方程式を求めよ．

解答 $f'(x)=\dfrac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}-1=\dfrac{\sin^2 x+\sin x-1}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\left(\sin x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

いま，

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ で } \sin\alpha=\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる角 α をとると，$0\leqq x<2\pi$ に限れば，$f'(x)$ の符号が－から＋に変化するのは，$x=\alpha$ の前後においてである．

一般に $f(x)$ の極小を与える点 $(x,\ y)$ は，$f'(x)$ の周期性を考えると，n を任意の整数として

$$\begin{cases} x=2n\pi+\alpha \\ y=f(2n\pi+\alpha)=\dfrac{1}{\cos\alpha}-(2n\pi+\alpha) \end{cases}$$

で与えられる．

$$\therefore \quad y=\frac{1}{\cos\alpha}-x \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀ $f(x)$ を極大とする点も 1 直線上にあることがわかる．各自，研究せよ．

②が求める直線であって，①より

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

だから

$$\boldsymbol{x+y=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}$$

B. 321

$f(x)=\sin x+ax$ が極値をもたないのは，定数 a がどんな値のときか．

アプローチ 「$f(x)$ が極値をもたない $\Longleftrightarrow$ $f'(x)=0$ となる x の実数値が存在しない」と考えがちです．

解答 $f'(x)=\cos x+a$

となるから，$f'(x)$ の符号がその前後で変化するような x の値があると，$f(x)$ は極値をもつことになる．逆に，$f'(x)$ に符号変化がなければ，$f(x)$ は単調だから極値をもたない．したがって，求める条件は，

$f'(x)$ に符号変化がない

こと，いいかえれば，

(i) すべての x に対して $f'(x)=\cos x+a\geqq 0$

(ii) すべての x に対して $f'(x)=\cos x+a\leqq 0$

のいずれかが成立することである．

等号が入ることに注意． ▶ (i)は $a\geqq 1$，(ii)は $a\leqq -1$ と同値である．

(答) $\boldsymbol{a\geqq 1}$ **または** $\boldsymbol{a\leqq -1}$

B. 322

$f(x)=x^4-4x^3+6ax^2$ とする．

$y=f(x)$ が変曲点をもつのは，a がどんな値のときか．

アプローチ $f''(x)=0$ となる x があっても，つねに $f''(x)\geqq 0$ なら変曲点は存在しません．変曲点を持つためには $f''(x)$ の符号が変わることが必要（そして十分）です．この事情は「$f(x)$ が極値をもつ $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が変化する」と同様です．（☞前問）

解答 $f'(x)=4x^3-12x^2+12ax$ $f''(x)=12(x^2-2x+a)$

2 回微分可能な関数 $f(x)$ の変曲点は $f''(x)$ の符号が変化する点である．このような点が存在するのは

重解ではだめ！ ▶ $x^2-2x+a=0$ が相異なる 2 実解をもつとき

である．よって，

$$\frac{1}{4}(\text{判別式})=1-a>0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a<1}$$

注意 $f''(x)$ が連続であるような $f(x)$ に限定すれば，$(\alpha,\ f(\alpha))$ が変曲点であるためには $f''(\alpha)=0$ となることは必要である（☞ B. 309［注］）．しかし，十分ではない．たとえば，本問における $a=1$ の場合や，$f(x)=x^4$ の場合を考えてみよ．

B. 323

a を定数，$f(x)=ax^2-\sin x-\cos x$ とする．
　$y=f(x)$ が変曲点をもたない条件を求めよ．

アプローチ 前問と同じことに注意します．

解答 $f'(x)=2ax-\cos x+\sin x$,

$$f''(x)=2a+\sin x+\cos x$$

　$f(x)$ は連続関数だから，この $f''(x)$ の符号がその前後で変化するような x の値があると，そこで，曲線 $y=f(x)$ は変曲点をもつことになってしまう．

　逆に，$f''(x)$ の符号が変化することがなければ，凹凸が変化しないのだから変曲点をもたない．

　よって，$\begin{cases}\text{(i)　任意の } x \text{ に対して　} f''(x)\geqq 0\\ \text{(ii)　任意の } x \text{ に対して　} f''(x)\leqq 0\end{cases}$ のいずれかが成立すればよい．

$$f''(x)=2a+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

より，(i)が成立するための条件は　$2a\geqq\sqrt{2}$
　　(ii)が成立するための条件は　$2a\leqq-\sqrt{2}$　である．

◀ 等号が入ることに注意

$$\therefore\quad a\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{または}\ a\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

B. 324

$f(x)=\dfrac{1-x}{2+x^2}$ の増減を調べ，最大値を求めよ．

解答 $f'(x)=\dfrac{-(2+x^2)-(1-x)\cdot 2x}{(2+x^2)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(2+x^2)^2}$

$$=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(2+x^2)^2}\quad \text{ただし，}\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{3}\\ \beta=1+\sqrt{3}\end{cases}$$

　$f(x)$ の分母は 0 にならないので，$f(x)$ が連続関数であることも考えて，$f(x)$ の増減は次表のようになる．

この増減表から

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leqq f(\alpha)$

のとき，かつそのときに限って $f(x)$ は最大値をもつ．

x	$(-\infty)$		α		β		$(+\infty)$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	(0)	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	(0)

$$f(\alpha)=f(1-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2+(1-\sqrt{3})^2}>0=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

であるから，最大値$=f(\alpha)=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}}$

B.325

$-1 \leqq x$ における $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3-3x+3}$ の最大値を求めよ．

アプローチ まず $f(x)$ の分母が 0 になることの有無を調べる必要があります．もしあれば，そこで不連続となり，最大値の存否が直接影響をうけるからです．もしも変域が，$-\infty<x<+\infty$ ならどうなるかを考察して下さい．

解答 分母を $u(x)=x^3-3x+3$ とおくと

$$u'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

x	-1		1	
$u'(x)$		$-$	0	$+$
$u(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

したがって，$-1 \leqq x$ において

$$u(x) \geqq u(1)=1>0$$

となる．すなわち $f(x)$ の分母は 0 にならず $f(x)$ は連続である．

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^3-3x+3)-x^3(3x^2-3)}{(x^3-3x+3)^2}=\frac{3x^2(3-2x)}{(x^3-3x+3)^2}$$

これより

x	-1		0		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{9}{5}$	$\searrow$

$f'(0)=0$ であるが $f(0)$ は極値ではない．

最大値$=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{9}{5}}$

［注］ 最小値を求めるには $f(-1)$ と $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ との大小を調べねばならない．

B.326

$y=f(x)=2\sin x+\sqrt{3}\sin 2x$ の最小値を求めよ．

解答　$f(x)$ は周期 2π をもつ奇関数である．

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ ………① での様子を調べればたりる．

$f'(x)=2\cos x+2\sqrt{3}\cos 2x$

$\quad=2(\sqrt{3}\cos x-1)(2\cos x+\sqrt{3})$

◁ $\cos 2x$
$=2\cos^2 x-1$

①の範囲内で $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$ ………② となる α の値はただ1つだけ存在し，その値 α に対し，$\sin\alpha=\sqrt{2}/\sqrt{3}$．

$$\therefore\quad f(\alpha)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

また，$2\cos x+\sqrt{3}=0$ となる x の値は $x=5\pi/6$ である．

①の範囲で $\cos x$ は x が増すと減少することに注意しながら $f'(x)$ の符号を調べて，つぎの増減表をうる．

x	0		α		$5\pi/6$		π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

$f(\alpha)=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

よって $f(x)$ の最小値は

$f(5\pi/6)$ と $f(-\alpha)=-f(\alpha)$ の最小値

であるが

$$f(-\alpha)=-\frac{4\sqrt{6}}{3}<-\frac{1}{2}=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

より，

$$\textbf{最小値}=-\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

◁ あわてて
最小値$=f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$
としてはだめ．
$-\pi\leqq x\leqq\pi$ での
$y=f(x)$ のグラフ
をえがいてみよ．

[注]　$f'(x)$ を計算してから，増減表を書く際に，$\cos x=X$ と置換すると，

$f'(x)=2(\sqrt{3}X-1)(2X+\sqrt{3})$

となる．これを基にして右のような「増減表」を作ると

X	-1		$-\sqrt{3}/2$		$1/\sqrt{3}$		1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$$\begin{cases} X=-\sqrt{3}/2 & (x=5\pi/6)\text{ のとき} \\ X=1/\sqrt{3} & (x=\alpha)\text{ のとき} \end{cases}$$

それぞれ極大値，極小値をとることになってしまう?!

この背理の根拠は，x が増加するとき，X が減少してしまうことにあるのである．

(「増減表」における $f(x)$ の↗，↘は↖，↙となるべきである．)

B.327

$0<x<\pi$ における $f(x)=\dfrac{2x-\sin 2x}{x^2}$ の最大値を求めよ．

解答

$$f'(x)=\frac{1}{x^4}\{(2-2\cos 2x)x^2-(2x-\sin 2x)\cdot 2x\}$$
$$=\frac{2(-x\cdot 2\cos^2 x+2\cos x\sin x)}{x^3}$$
$$=\frac{4\cos x(\sin x-x\cos x)}{x^3} \quad \cdots\cdots ①$$

まず，$g(x)=\sin x-x\cos x$ の符号を調べよう．

$$g'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$$

よって，$0<x<\pi$ において $g'(x)>0$，$g(x)$ は増加である．

一方，$g(0)=0$ であるから

$$0<x<\pi \text{ でつねに } g(x)>0 \quad \cdots\cdots ②$$

である．よって，①，②より

$0<x<\pi$ で $f'(x)$ は $\cos x$ と同符号

したがって，

$$\left.\begin{array}{l} 0<x<\pi/2 \text{ で } f'(x)>0,\ f(x) \text{ は増加} \\ \pi/2<x<\pi \text{ で } f'(x)<0,\ f(x) \text{ は減少} \end{array}\right\} \cdots\cdots (*)$$

これより　　最大値$=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\pi}}$

微分を利用した不等式の証明．詳しくは ☞ B. 344～352

［注］ $0<x<\pi/2$ における $g(x)$ の正負は，三角関数の基本的不等式

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{ では } \sin x<x<\tan x$$

からも導かれる．$g(x)=\cos x(\tan x-x)$ と変形すればよい．

なお，$\dfrac{\pi}{2}\leqq x<\pi$ における $g(x)>0$ は，$\sin x$，$\cos x$ の正負から明らかであろう．

研究 $g(x)>0$ を利用しなくとも $(*)$ は，つぎのように示すこともできる．

「$\cos x=0$ となる $x=\pi/2$ の近傍では $\sin x\fallingdotseq 1$，したがって $\sin x-x\cos x\fallingdotseq 1>0$ であるから，$x=\pi/2$ の前後で $\cos x$ の符号が＋から－へと変化するのに応じて $f'(x)$ の符号も＋から－へと変化する．

その他の x の値においては $f'(x)=\dfrac{4\cos^2 x}{x^3}(\tan x-x)$ となるが，$\tan x-x$ は，区間 $(0,\ \pi/2)$ においてはつねに正，$(\pi/2,\ \pi)$ においてはつねに負であるから，$x\neq\pi/2$ の前後では，符号変化はしない．」

B.328

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，$f(\theta)=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ の最小値を求めよ．

解答 $f'(\theta)=\dfrac{(1+\cos\theta)'\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)(\sin\theta\cos\theta)'}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$$\begin{aligned}\text{分子}&=-\sin^2\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=-\cos^2\theta+\sin^2\theta-\cos^3\theta\\&=-\cos^3\theta-2\cos^2\theta+1\\&=-(\cos\theta+1)(\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=-(\cos\theta+1)\left(\cos\theta-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

定義域 $0<\theta<\pi/2$ では $\cos\theta$ の変域は $0<\cos\theta<1$ であるので，$\cos\theta+1>0$，$\cos\theta-(-1-\sqrt{5})/2>0$ である．したがって，$f'(\theta)$ の符号は，$\cos\theta-(-1+\sqrt{5})/2$ のそれと，ちょうど反対になる．そこでいま区間 $0<\theta<\pi/2$ において

$$\cos\theta=(-1+\sqrt{5})/2$$

をみたす θ の値を α とおくと，区間 $0<\theta<\pi/2$ で $\cos\theta$ は単調減少であることから，

$$\begin{cases}\theta\in(0,\ \alpha) & \Longrightarrow f'(\theta)<0\\ \theta\in(\alpha,\ \pi/2) & \Longrightarrow f'(\theta)>0\end{cases}$$

となり，したがって $f(\theta)$ の増減は右表のようになる．

θ	(0)		α		$(\pi/2)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

$$\cos\alpha=(-1+\sqrt{5})/2,\ 0<\alpha<\pi/2$$

より

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

であるから $f(\theta)$ の最小値は，

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\frac{(\sqrt{5}+1)/2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5}-1}(\sqrt{5}-1)}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{16}\sqrt{\sqrt{5}-1}(\sqrt{5}+1)^3}\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{5}+1)^{\frac{5}{2}}$ とも表せる

B.329

$$f(x)=x+\sqrt{2x-x^2}\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

の増減を調べ，その最大値，最小値を求めよ．

アプローチ 無理関数 $f(x)$ については $f'(x)$ も無理関数となって $f'(x)$ の正負が調べにくい．

単に $f'(x)=0$ となる x を求めるなら①′より $\sqrt{2x-x^2}=x-1$ を解けばよい．$\left(x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

だが，①′の形のままでは，$f'(x)$ の符号がわかりにくい．

☞[注]2°

解答 $f'(x)=1+\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=1+\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ ………①

①より直ちに，$0<x<1$ で $f'(x)>0$ がわかる．

$1\leqq x<2$ での $f'(x)$ の符号を調べるために，①を変形する．

$$f'(x)=1-\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{\sqrt{2x-x^2}-(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}\quad\text{………①′}$$

$$=\frac{(2x-x^2)-(x-1)^2}{\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{2x-x^2}+(x-1))}$$

$$=\frac{-(2x^2-4x+1)}{\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{2x-x^2}+(x-1))}$$

$$=-\frac{2(x-\alpha)(x-\beta)}{\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{2x-x^2}+(x-1))}\quad\text{………②}$$

ただし，$\begin{cases}\alpha=(2-\sqrt{2})/2\\ \beta=(2+\sqrt{2})/2\end{cases}$

$1\leqq x<2$ では②の分母は正であり，また $\alpha<1<\beta<2$ であるから $f(x)$ の増減表が右のようになる．

x	0		1		β		2
f'		+		+		−	
f	0	↗	2	↗		↘	2

これより，

最大値$=f(\beta)=1+\sqrt{2}$

である．

また，$f(0)=0<2=f(2)$ より，最小値$=f(0)=0$

（答）　**最大値$=1+\sqrt{2}$，最小値$=0$**

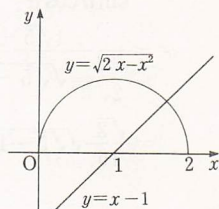
［注］ 1°　x の変域によって $f'(x)$ の符号のみやすい形が異なるところがおもしろい．$0<x<1$ では②の形に変形してしまうと $f'(x)$ の符号がわかりにくくなってしまう．

2°　$f'(x)$ の符号を調べるには，

$$y=\sqrt{2x-x^2},\ y=x-1$$

のグラフを考察してもよい．また

$$f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}<0$$

より，$f'(x)$ は減少関数である．これを利用しても $f'(x)$ の符号を調べられる．

B.330

円形の板から１つの扇形を切り取り，残りで円すい形の容器を作りその容積を最大にしたい．

切り取るべき扇形の中心角を求めよ．

解答　円の半径を a，切り取る扇形の中心角を θ とする．また，残りで作る円すいの底面の半径を r，高さを h，体積をVとする．

円すいの底面の円周は，残った扇形の弧長に等しいから

$$2\pi r=(2\pi-\theta)a$$

$$\therefore\quad \theta=2\pi\left(1-\frac{r}{a}\right)\quad\cdots\cdots\cdots①$$

さて，

$$h=\sqrt{a^2-r^2}$$

であるから，

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}r^2\sqrt{a^2-r^2}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

$$\therefore\quad V^2=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2r^4(a^2-r^2)$$

◀ このまま r について微分して，$\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{r(2a^2-3r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}$ を求めてもよいが，左のように，無理関数の微分をさけるようにすると，計算がずっとラクになる．

となる．そこで，$r^2=x$ とおき，

$$0<x<a^2$$

において関数

$$f(x)=x^2(a^2-x)$$

を最大にする x の値を求める．

$$f'(x)=x(2a^2-3x)$$

より，右表をうる．

x	(0)		$\frac{2}{3}a^2$		(a^2)
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

よって，

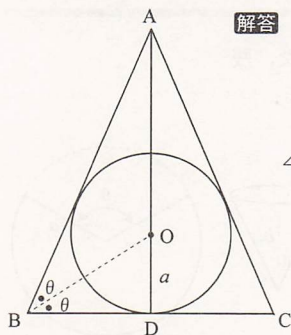
$$x=\frac{2}{3}a^2$$

のとき $f(x)$ は最大となる．

$r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$ を①に代入して，切り取るべき角$=\boldsymbol{2\pi\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)}$

◀ 約 66° である．

B. 331

半径 a の定円に外接する二等辺三角形の等辺が最小となるときの底辺の長さを求めよ．

解答　底角を 2θ とする．直角三角形 ABD に注目して，

$$AB=\frac{BD}{\cos 2\theta}. \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，左図において，BO は底角を二等分するから $\angle OBD=\theta$ となり，直角三角形 OBD に注目して，

$$BD=\frac{a}{\tan\theta}. \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より

$$AB=\frac{a}{\tan\theta\cos 2\theta}.$$

よって，$0<\theta<\pi/4$ において $f(\theta)=\tan\theta\cos 2\theta$ の最大値を考えればよい．

$(\tan\theta)'=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ▶

$$f'(\theta)=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos 2\theta+\tan\theta\cdot(-2\sin 2\theta)$$

$$=\frac{\cos 2\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{4\cos^4\theta-2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}=\frac{4(\cos^2\theta-\alpha)(\cos^2\theta+\beta)}{\cos^2\theta}$$

ただし，$\alpha=(\sqrt{5}+1)/4$，$\beta=(\sqrt{5}-1)/4$

▶ $\tan\theta=t$ とおいて AB を t の関数で表すと $AB=aF(t)$，$F(t)=\dfrac{1+t^2}{t(1-t^2)}$，$0<t<1$ となる．

$F'(t)$ の符号の方が少し調べやすい．

各自試みよ．

これから，

$f'(\theta)$ は $\cos^2\theta-\alpha$ と同符号

である．

$0<\theta<\pi/4$ で $\cos^2\theta$ は減少し，$1/2<\alpha<1$ であるから，変域内に $f'(\theta)=0$，すなわち $\cos^2\theta=\alpha$ となる θ の値 θ_0 が 1 つあり，$f(\theta)$ の増減表は右のようになる．

θ	(0)		θ_0		$\left(\frac{\pi}{4}\right)$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

よって，$\theta=\theta_0$ のとき $f(\theta)$ は最大，等辺 AB は最小となる．

このとき，$\cos^2\theta_0=\alpha$ より

$$\frac{1}{\tan^2\theta_0}=\frac{\cos^2\theta_0}{1-\cos^2\theta_0}=\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$$

$$BC=2BD=\frac{2a}{\tan\theta_0}=\boldsymbol{2\sqrt{2+\sqrt{5}}\,a}$$

B. 332

海中の小島Aから直線状の海岸の最も近い点Bまでの距離が a，Bから海岸のC点までの距離は b である．

島にいる人が速さ v の小船で海を渡り，P点で上陸してから $2v$ の速さで海岸沿いにCまで歩く．所要時間最小の上陸点はどこか．

解答　上陸点Pが線分BC上にある場合を考えればよいから，

$\angle BAP=\theta$ とおくと，θ の変域は $\angle BAC=\alpha$ とおいて

$$0\leqq\theta\leqq\alpha \quad\cdots\cdots ①$$

である．ここで，α は鋭角の定角である．

$$AP=\frac{a}{\cos\theta},\ PC=b-a\tan\theta$$

であるから，所要時間 T は

$$T=\frac{AP}{v}+\frac{PC}{2v}=\frac{b}{2v}+\frac{a}{2v}\left(\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta\right)$$

と表せる．そこで，

$$f(\theta)=\frac{2}{\cos\theta}-\tan\theta$$

とおき，変域①において $f(\theta)$ を最小とする θ の値を求めればよい．

$$f'(\theta)=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$$

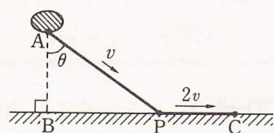
i）$\alpha>\pi/6$ すなわち，$a<\sqrt{3}\,b$ のとき

$f'(\theta)=0$ となる $\theta=\pi/6$ は①の変域内にある．

よって，$\theta=\pi/6$ のとき，所要時間は最小になる．

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		α
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

ii）$\alpha\leqq\pi/6$ すなわち，$a\geqq\sqrt{3}\,b$ のとき

変域①において $f(\theta)$ は減少するから，$\theta=\alpha$ のとき，$f(\theta)$ は最小となる．

θ	0		α
$f'(\theta)$		$-$	
$f(\theta)$		↘	

（答）　$a<\sqrt{3}\,b$ のとき，$BP=a/\sqrt{3}$ である点P；$a\geqq\sqrt{3}\,b$ のとき，点 P=C

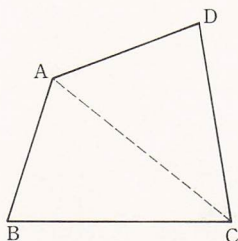
［注］ $BP=x$ として T を x の関数で表してもよい．

B.333

四角形 ABCD の各辺の長さは一定で，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$ であり，また $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ はいずれも 0 と π の間にあるとする．

(1)　$\angle B=x$，$\angle D=y$ とおけば，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ab\sin x}{cd\sin y}$ であることを示せ．

(2)　四角形 ABCD の面積 S は，円に内接するときに最大となることを証明せよ．ただし，与えられた四辺をもつ四角形で円に内接するものが存在することは仮定してよい．

アプローチ　x を決めると AC が決まり，AC が決まると y が決まるので，y は x の関数です．

解答　(1)　△ABC と △CDA で余弦定理を用いると

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos(\angle B)$$
$$=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cdot\cos(\angle D)$$
$$\therefore\quad a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos y$$

が成りたつ．両辺を x で微分すると

$$2ab\sin x=2cd\sin y\times\frac{dy}{dx}$$

$$\sin y>0 \text{ より}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{ab\sin x}{cd\sin y}$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin x+\dfrac{1}{2}cd\sin y$

$$\therefore\quad \frac{dS}{dx}=\frac{1}{2}ab\cos x+\frac{1}{2}cd\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{ab(\cos x\sin y+\cos y\sin x)}{2\sin y}=\frac{ab}{2\sin y}\sin(x+y)$$

ところで，$\dfrac{dy}{dx}>0$ であるから，y は x の増加関数であり，したがって $x+y$ も増加関数である．よって $x+y=\pi$ となる x の値はただ1つ存在し，その値を α とおくと

$$\begin{cases}0<x<\alpha \Longrightarrow 0<x+y<\pi & \therefore\quad \sin(x+y)>0\\ \alpha<x<\pi \Longrightarrow \pi<x+y<2\pi & \therefore\quad \sin(x+y)<0\end{cases}$$

となるから，

$$0<x<\alpha \Longrightarrow \frac{dS}{dx}>0\ ;\ \alpha<x<\pi \Longrightarrow \frac{dS}{dx}<0$$

x	0	α	π
$\dfrac{dS}{dx}$	$+$	0	$-$
S	↗		↘

であり，S は，$x=\alpha$ のとき，すなわち $x+y=\pi$ のとき最大となる．ところで，x と y は四角形 ABCD の対角だから，$x+y=\pi$ となるのは，四角形 ABCD が円に内接するときである．■

B.334

a_1, a_2, …, a_n を与えられた n 個の正数とする．

(1)　関数 $f_k(x)$, $F(x)$ を

$$f_k(x)=\frac{a_k}{e}x-\log x \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n),\qquad F(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

と定義するとき，$f_k(x)$, $F(x)$ の最小値 m_k, M を求めよ．

(2)　(1)を利用して，相加平均・相乗平均についての不等式

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$　がつねに成りたつことを示せ．

解答　(1)　$f_k'(x)=\dfrac{a_k}{e}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a_kx-e}{ex}$

$F'(x)=\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k-\dfrac{n}{x}=\dfrac{S_nx-ne}{ex}$　ただし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

x	(0)		e/a_k	
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$
$f_k(x)$		↘		↗

x	(0)		ne/S_n	
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘		↗

ゆえに　$m_k=f_k(e/a_k)=1-\log(e/a_k)=\mathbf{\log a_k}$

$$\begin{aligned}M=F(ne/S_n)&=\sum_{k=1}^{n} f_k(ne/S_n)=\sum_{k=1}^{n}\{na_k/S_n-\log(ne/S_n)\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\{na_k/S_n+\log S_n-\log ne\}\\&=\frac{n}{S_n}\sum_{k=1}^{n} a_k+n(\log S_n-\log n-1)\\&=\boldsymbol{n\log S_n-n\log n}\end{aligned}$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$

(2)　m_k, M の定義から　$m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n \leqq M$　である．

これに上の結果を代入して

$$\log a_1+\log a_2+\cdots\cdots+\log a_n \leqq n\log(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)-n\log n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n}\log a_1a_2\cdots\cdots a_n \leqq \log\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}.$$ ■

[注]　等号が成立するのは，$f_k(x)=m_k$ となる x の値 e/a_k が，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ のどの場合も等しいとき，すなわち　$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$　のときである．cf. B. 348

B. 335

$f(x)=x^4-4x^3+6ax^2$ とする．$a<1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつが，この変曲点は a の変化につれて，どんな図形を描くか，図示せよ．

解答　$f'(x)=4x^3-12x^2+12ax$

$$f''(x)=12x^2-24x+12a$$
$$=12(x^2-2x+a)$$

$y=f(x)$ の変曲点の x 座標は，方程式

$$x^2-2x+a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の異なる2解であり y 座標は，この x 座標に対し

$$y=x^4-4x^3+6ax^2 \quad \cdots\cdots ②$$

で与えられる．

①より，　$a=-x^2+2x$　$\cdots\cdots$①′

であるから，これを a の変域：

$$a<1$$

および②に代入して a を消去すると，軌跡の方程式

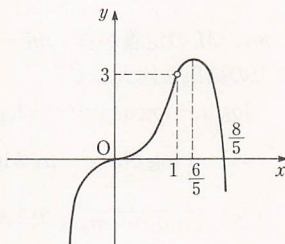
$$\begin{cases} -x^2+2x<1 \\ y=x^4-4x^3+6(-x^2+2x)x^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad y=-5x^4+8x^3 \quad かつ \quad x \neq 1$$

が得られる．

$$y'=-20x^3+24x^2$$
$$=-20x^2\left(x-\frac{6}{5}\right)$$

x		0		$\frac{6}{5}$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↗	0	↗		↘

を用いて増減を調べると，求める図形は，右図のようである．

注意　$y=f(x)$ が変曲点をもつための条件“$a<1$”の導出については，B. 322 で済んでいる．

B. 336

$0<t<1$ であるような t のおのおのの値に対して，x の関数

$$f(x)=\frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える．区間 $0<x<1$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値を α とする．t が $0<t<1$ を動くとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ はどんな曲線をえがくか．

アプローチ 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ は，曲線 $y=f(x)$ 上にあります．しかし，この曲線は，t の変化につれて動いていきます．t が $0<t<1$ のどんな値でも，つねに $(\alpha,\ f(\alpha))$ がのっている定曲線を求めたいのです．

解答 $f'(x)=\dfrac{x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\dfrac{tg(x)}{x^2(1-tx)^2}$

ただし，$g(x)=x^2+2tx-1$

$y=g(x)$ のグラフは右図のようになるので $f(x)$ を区間 $0<x<1$ において最小とする x の値は，方程式 $g(x)=0$ の 2 実解の大きい方，すなわち

$$\alpha=-t+\sqrt{t^2+1} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

x	(0)		α		(1)
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

$(\alpha,\ f(\alpha))=(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=\alpha & \cdots\cdots\cdots ② \\ y=\dfrac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)} & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

◀ 以下，x，y の関係式が得られると，求める曲線がわかる．

一方，$g(\alpha)=\alpha^2+2t\alpha-1=0$ より

$$t=\frac{(1-\alpha^2)}{2\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots ①'$$

◀ ①を用いて，t を α で表すのと同じ．

①′ を③に代入して整理すると

$$y=\frac{1}{\alpha^2} \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

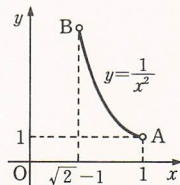
◀ ②，③′ より α を消去すると $y=\dfrac{1}{x^2}$ 以下，x の変域を求める．

一方，①を　$\alpha=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}$ $\cdots\cdots\cdots ①'$

と変形すると，$0<t<1$ で α は t の減少関数であることがわかり，α の変域は，

$$\sqrt{2}-1<\alpha<1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

である．②，③′，④より，求める軌跡は

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{x^2},\ \sqrt{2}-1<x<1}$$

B.337

方程式 $\log x = x + a$ を満たす x の実数値の個数は定数 a の値によってどう変わるか．必要なら $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい．

アプローチ 方程式をグラフを用いて考察します．その際，次の事実

'方程式　$f(x)=0$　の解'
='曲線　$y=f(x)$ と x 軸 $y=0$
の交点の x 座標'

また，より一般に

'方程式　$f(x)=g(x)$　の解'
='2 曲線　$y=f(x)$，$y=g(x)$
の交点の x 座標'

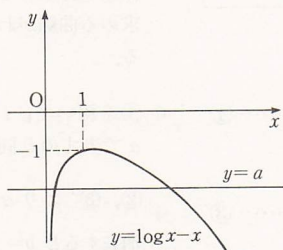
が基本的です．

解答 $\log x = x + a$ の実数解は，2 つの関数

$y = \log x - x$ ………①

$y = a$ ………②

のグラフの共有点の x 座標である．

②は傾き 0 の直線，一方①のグラフは下記の性質から図のように描ける．

$$y' = \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x-1}{x}$$

x	(0)		1		(∞)
y'		+	0	−	
y		↗	−1	↘	

しかも，

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}(\log x - x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(\log x - x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\log x}{x} - 1\right) = -\infty \quad \left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0\right)$$

以上より，求める個数は $\begin{cases} a > -1 & \cdots\cdots \text{なし} \\ a = -1 & \cdots\cdots 1\text{個} \\ a < -1 & \cdots\cdots 2\text{個} \end{cases}$

B.338

方程式 $\cos x+\sin x=1+x-x^2$ を満たす x の実数値は $x=0$ のほかにないことを示せ．

アプローチ $y=\cos x+\sin x$，$y=1+x-x^2$ の概形を描くだけでは事情がはっきりとしません．

解答 $f(x)=\cos x+\sin x-(1+x-x^2)$ とおけば，与えられた方程式は $f(x)=0$ と同値である．

$$f'(x)=-\sin x+\cos x-1+2x$$

$$f''(x)=-\cos x-\sin x+2=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2>0$$

よって，$f'(x)$ は増加する．

さらに，$f'(0)=0$ であるから

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \text{ で } f'(x)<0 \\ x>0 \text{ で } f'(x)>0 \end{array}\right\}$$

となるので，$f(x)$ の増減は右のようになる．

x	0
$f'(x)$	$-$　0　$+$
$f(x)$	↘　0　↗

$f(0)=0$ であるから

$x\neq0$ では $f(x)>0$ となる．

よって，$f(x)=0$ となる x は $x=0$ のほかにはない．■

［注］ 上の証明と同じ論法により，

$$\cos x+\sin x\geqq1+x-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \quad (\text{等号は } x=0 \text{ のときのみ成立})$$

が示せる．

B.339

k を実数の定数とし，

$$f(x)=x^2(x+8),\quad g(x)=(x^2-1)(x+4)$$

とするとき，x に関する方程式

$$f(x)-kg(x)=0$$

の相異なる実数解の個数は k の値によってどう変わるか．

アプローチ 直接に $y=f(x)-kg(x)$ のグラフと x 軸との共有点をみたり，$y=f(x)$，$y=kg(x)$ の共有点を調べるのは処理が面倒です．**パラメータ k を分離**した方程式を作るのがよいでしょう．このちょっとしたテクニックで処理がぐんと簡単になります．

解答 $g(x)=(x^2-1)(x+4)=0$ の解は $x=\pm1,\ -4$ で，これらは

$$f(x)-kg(x)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の解ではないから，①は

$$\frac{f(x)}{g(x)}=k \text{ すなわち } \frac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}=k \qquad \cdots\cdots ②$$

と同値である．

②の左辺を $F(x)$ とおくと，②の実数解は曲線 $y=F(x)$ と直線 $y=k$ との共有点の x 座標で与えられる．

$$F'(x)=\frac{(3x^2+16x)(x^3+4x^2-x-4)-(x^3+8x^2)(3x^2+8x-1)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

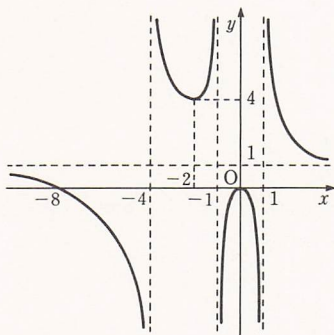
$$=\frac{-2x(x+2)(2x^2-3x+16)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

x	$(-\infty)$		-4		-2		-1		0		1		(∞)
$F'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$F(x)$	(1)	↘	$-\infty$ / ∞	↘	4	↗	∞ / $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ / ∞	↘	(1)

$y=F(x)$ のグラフは左図のようになる．

以上より，つぎのようになる．

(答)

k		0		1		4	
実数解の個数	3	2	1	0	1	2	3

B.340

点 $(4,\ k)$ から放物線 $y=x^2$ に相異なる3本の法線を引くことができるのは，k がどんな値のときか．

解答　$y=x^2$ の法線のうちに，点 $\mathrm{P}(4,\ k)$ を通るものが3本存在する条件を求めればよい．

$y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における法線の方程式は，$t \neq 0$ のとき

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t). \qquad \cdots\cdots ①$$

点 $(0,\ 0)$ における法線は y 軸と一致し，これはPを通らない．よって，①で表される法線のみを考えれば十分である．

①が点 $\mathrm{P}(4,\ k)$ を通る条件は

$$k-t^2=-\frac{1}{2t}(4-t)$$

$$\therefore \quad t^2-\frac{2}{t}+\frac{1}{2}=k. \qquad \cdots\cdots ②$$

これをみたす t の実数値が3個存在するような k の値の範囲が求めるものである．

◁ 分母を払って整頓し，
$2t^3+(1-2k)t-4=0$
この左辺のグラフと横軸との共有点を調べようとすると，かえってめんどうになる．
パラメータ k を分離した②のままがよい．

それゆえ，②の左辺を $f(t)$ とおき，tu 平面上，曲線 $u=f(t)$ と直線 $u=k$ とが相異なる3点で交わる条件を求めればよいことになる．

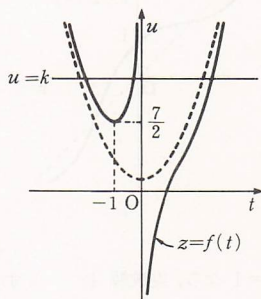
$$f'(t)=2t+\frac{2}{t^2}=\frac{2(t+1)(t^2-t+1)}{t^2}$$

から $f(t)$ の増減の様子がわかる．

$$\begin{cases} t=0 \text{ で } f(t) \text{ が不連続であること，} \\ \text{遠方で，} u=f(t) \text{ は放物線} \\ \quad u=t^2+\dfrac{1}{2} \text{ に近づくこと，} \\ \text{極小値}=f(-1)=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

であることなどを考慮に入れると，$u=f(t)$ のグラフは右のようになる．

そこで，直線 $u=k$ と相異なる3点で交わる条件より

$$k>\frac{7}{2}$$

B.341

aが1でない定数であるとき，xの方程式

$$x^2+ax=\sin x$$

はちょうど2つの実数解をもつことを示せ．

アプローチ　パラメータaを分離した形に変形して，グラフを利用します．

解答　まず，aによらず $x=0$ は1つの解である．

そこで，$x\neq 0$ の実数解がちょうど1つあることを示せばよい．

$x\neq 0$ では与えられた方程式は

$$a=F(x)\quad ただし，F(x)=\frac{\sin x}{x}-x$$

と書き直せる．ここで，

$$F'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-1=\frac{G(x)}{x^2}$$

$$ただし，G(x)=x\cos x-\sin x-x^2$$

となり，さらに

$$G'(x)=(\cos x-x\sin x)-\cos x-2x$$
$$=-x(\sin x+2)$$

となるので，$G(x)$の増減は右表のようになり，

$x\neq 0$　では　$G(x)<0$

である．よって，

$x\neq 0$　では　$F'(x)<0$

となる．

x		0	
$G'(x)$	$+$	0	$-$
$G(x)$	↗	0	↘

x	$(-\infty)$	(0)	(∞)
$F'(x)$	$-$		$-$
$F(x)$	(∞) ↘ (1)		(1) ↘ $(-\infty)$

$F(x)$は上表のように単調に減少する．

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{F(x)-(-x)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ だから，

$y=F(x)$ は，$y=-x$ に漸近する．

よって，曲線 $y=F(x)$ と直線 $y=a$ $(a\neq 1)$ とは，

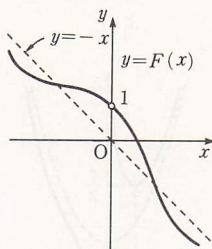
$x\neq 0$ なる1点で交わる．

すなわち，方程式 $a=F(x)$ は $a\neq 1$ である限り，0でない実数解を1つもつ．∎

以下，$y=F(x)$ のグラフの概形を調べ，直線 $y=a$ との共有点に注目する．

$F'(x)$の符号を調べるために，$G(x)$の増減をまず調べる．

◀ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$a=1$ なら，実数解は $x=0$ のみになる．

B.342

x の方程式 $x^a=a^x$ ……① の正の解の個数が正数 a の値によってどのように変わるかを調べよ．必要なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい．

アプローチ 方程式 $x^a=a^x$ の解の個数を求めるには，「$y=x^a$，$y=a^x$ の共有点を調べる」，「$y=x^a-a^x$ と x 軸との共有点を調べる」，「$y=a\log x$，$y=x\log a$ の共有点を調べる」などという方針もありますが，みな処理しにくいです．パラメータ a を分離するのが処理のコツです．

解答 x，a が正であることから，①は，両辺の対数をとった式

$$a\log x=x\log a$$

$$\therefore\quad \frac{\log x}{x}=\frac{\log a}{a}\qquad\cdots\cdots②$$

と同値である．

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，②は，

$$f(x)=f(a)\qquad\cdots\cdots②'$$

と表せるので，まず $y=f(x)$ の値の変化を調べよう．

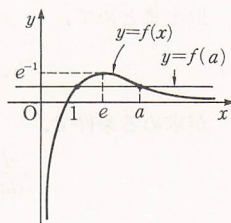
$$f'(x)=\frac{x^{-1}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

より，$f(x)$ の増減は下表に従う．

x	(0)		e		(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	e^{-1}	↘	(0)

◀ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

以上から $y=f(x)$ のグラフは右のようになる．

x 軸に平行な直線 $y=f(a)$ と曲線 $y=f(x)$ とは必ず $x=a$ に相当する点を共有することを考え，他にも共有点があるかないかと調べて，

$0<a\leqq 1$ …… 1個
$1<a<e$ …… 2個
$a=e$ …… 1個
$e<a$ …… 2個

B. 343

$e^x<ax+b$ となる正数 x が存在するような実数 a，b の満たす条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

解答　$f(x)=e^x-ax-b$　　とおくと

$$f'(x)=e^x-a$$

である．そこで $x>0$ の範囲で $f'(x)$ の符号が変化するかどうかに注目して分類する．

i）$a\leqq 1$ のとき；

$x>0$ のとき $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する．

ゆえに，$f(x)<0$ となる $x>0$ が存在するのは

$$f(0)=1-b<0$$

$$\therefore\quad b>1$$

のときである．

ii）$a>1$ のとき；

x	(0)		$\log a$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

右表のように，$f(x)$ は

$$x=\log a$$

において最小値

$$f(\log a)=a-a\log a-b$$

をとる．

よって求める条件は

$$a-a\log a-b<0$$

$$\therefore\quad b>a-a\log a$$

となることである．

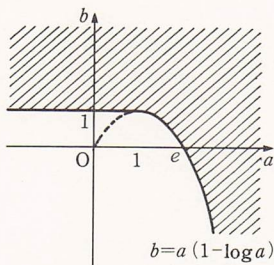
以上まとめて，

$$b>\begin{cases}1 & (a\leqq 1\ \text{のとき})\\ a(1-\log a) & (a>1\ \text{のとき})\end{cases}$$

が求める条件で，

$$\frac{d}{da}\{a(1-\log a)\}=1-\log a-a\cdot\frac{1}{a}$$

$$=-\log a<0$$

となることなどに注意して，$(a,\ b)$ の範囲を図示すると左のようである．ただし，境界上の点は含まない．

B.344

$|x| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，つぎの二つの関数の大小を比較せよ．

$$f(x)=5-\cos 2x,\quad g(x)=4(x\sin x+\cos x)$$

解答　$F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$F'(x)=2\sin 2x-4\{(\sin x+x\cos x)-\sin x\}$$
$$=4\cos x(\sin x-x).$$

ここで

$$0<x<\pi/2 \text{ で } \sin x<x \quad \cdots\cdots(*)$$

◀ この事実は $\sin x$ の定義から，図形的に導けばよい．微分を利用する証明には，若干の論理的困難が伴う．*cf*. A 2.5

を用い，さらに

$\sin x-x$ が x の奇関数

であることと，

$$|x|<\frac{\pi}{2} \text{ で，} \cos x>0$$

とから，右の増減表をうる．これより，

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
F'	0	$+$	0	$-$	0
F		↗	0	↘	

$$|x|\leqq\frac{\pi}{2} \text{ で } F(x)\leqq F(0)=0$$

よって

(答)　$f(x)\leqq g(x)$，等号は $x=0$ でのみ成立

B.345

$x<1$ のとき $\dfrac{x}{1-x}\geqq 1-e^{-x}$ が成立することを示せ．

解答　$F(x)=\dfrac{x}{1-x}-(1-e^{-x})=\dfrac{1}{1-x}+e^{-x}-2$ とおくと

$$F'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-e^{-x},\quad F''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}+e^{-x}.$$

よって，$x<1$ では $F''(x)>0$ である．したがって，$x<1$ で $F'(x)$ は増加関数で，

◀「$F''(x)>0$ から $F(x)$ は下に凸．そして $F'(0)=F(0)=0$ だから，$y=F(x)$ は原点で x 軸に接している．よって $F(x)\geqq 0$ である」としてもよい．*cf*. B. 338

さらに $F'(0)=0$ であるから，

$$\begin{cases} x<0 \Longrightarrow F'(x)<0 \\ 0<x<1 \Longrightarrow F'(x)>0 \end{cases}$$

これより右の増減表をうる．

x		0		1
F'	$-$	0	$+$	
F	↘	0	↗	

したがって，

$$x<1 \Longrightarrow F(x)\geqq F(0)=0.$$

これは示すべき不等式である．■

B. 346

$x>0$ のとき，つぎの各不等式の成立を示せ．

(i)　$1-\dfrac{x^2}{2!}<\cos x<1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$　　(ii)　$x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$

解答　$F(x)=\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\right)-\sin x$ とおくと，

$$F'(x)=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-\cos x,\quad F''(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$F'''(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right),\quad F^{(4)}(x)=x-\sin x$$

となる．したがって，証明すべき不等式は

$$F'''(x)>0,\quad F''(x)>0,\quad F'(x)>0,\quad F(x)>0$$

に他ならない．さて，

$$x>0 \text{ では } \sin x<x \quad \cdots\cdots(*)$$

を用いると，$x>0$ でつねに $F^{(4)}(x)>0$.

▶ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x<x$ は $\sin x$ の定義から．(B. 344 欄外注)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x$ においては，$\sin x\leqq 1<\dfrac{\pi}{2}\leqq x$ より $\sin x<x$ である．

よって，$x\geqq 0$ で $F'''(x)$ は増加で，さらに $F'''(0)=0$ だから

$x>0$ でつねに $F'''(x)>0$.

よって，$x\geqq 0$ で $F''(x)$ は増加で，さらに $F''(0)=0$ だから

$x>0$ でつねに $F''(x)>0$.

よって，$x\geqq 0$ で $F'(x)$ は増加で，さらに $F'(0)=0$ だから

$x>0$ でつねに $F'(x)>0$.

よって，$x\geqq 0$ で $F(x)$ は増加で，さらに $F(0)=0$ だから

$x>0$ でつねに $F(x)>0$. ■

研究　上で示した不等式から，$|x|\fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos x\fallingdotseq 1-\frac{x^2}{2},\quad \sin|x|\fallingdotseq|x|-\frac{|x|^3}{3!}$$

という近似式が導かれ，その誤差は，それぞれ $\dfrac{x^4}{4!}$，$\dfrac{|x|^5}{5!}$ より小さいことがわかる．

なお，ここで証明した事実は，大学で学ぶテイラー展開

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}+\cdots\cdots$$

と密接に関連している．

B.347

$0<p<1$, $x>0$ のとき

$$p(x-1)\geqq x^p-1\geqq px^{p-1}(x-1)$$

が成立することを示せ．

解答 p を定数，x を変数と考え，

$$f(x)=p(x-1)-(x^p-1),\quad g(x)=(x^p-1)-px^{p-1}(x-1)$$

とおく．

$$f'(x)=p-px^{p-1},\quad f''(x)=-p(p-1)x^{p-2}$$

条件 $0<p<1$ から $x>0$ のとき $f''(x)>0$.

したがって，$x>0$ において，$f'(x)$ は増加する．

◀ もちろん，$f'(x)$ は $x=0$ では定義されない．

一方，　$f'(1)=0$　であるから，

$$\begin{cases} 0<x<1 \Longrightarrow f'(x)<0 \\ 1<x \quad\Longrightarrow f'(x)>0 \end{cases}$$

となり，したがって

$$\begin{cases} 0<x\leqq 1 \text{ において } f(x) \text{ は減少し} \\ 1\leqq x \quad \text{ において } f(x) \text{ は増加する．} \end{cases}$$

◀ ☞[注] 2° $f(x)$ は $x=0$ でもそのまま定義できるので，$0\leqq x\leqq 1$ としてもよい．

ゆえに，$x>0$ において　$f(x)\geqq f(1)=0$　である．

$$\therefore \quad p(x-1)\geqq x^p-1$$

つぎに，$g'(x)$ を計算すると

$$g'(x)=p(1-p)x^{p-2}(x-1)$$

よって，$\begin{cases} 0<x<1 \text{ で } g'(x)<0 \\ 1<x \quad \text{ で } g'(x)>0 \end{cases}$

ゆえに，$\begin{cases} 0<x\leqq 1 \text{ で } g(x) \text{ は減少し，} \\ 1\leqq x \quad \text{ で } g(x) \text{ は増加する．} \end{cases}$

◀ ☞[注] 2° なお $g(x)$ は $x=0$ では定義されない．

一方，$g(1)=0$ であるから，$x>0$ では $g(x)\geqq g(1)=0$

$$\therefore \quad x^p-1\geqq px^{p-1}(x-1)$$

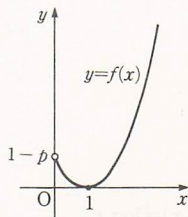
[注] 1° "$x>0 \Longrightarrow f(x)\geqq 0$" を示すには，

「$x>0$ では $y=f(x)$ は下に凸である」と

「$y=f(x)$ は x 軸と $(1,\ 0)$ で接している」

の 2 つを証明する．という手もある．

2° 前問でも，本問でも，「$x>a$ において $f'(x)>0$ ならば，$x\geqq a$ において $f(x)$ は増加」という論理が使われているが，一般に I を開区間，I_0 を端点を含めた閉区間とすると，$f(x)$ が I_0 で連続，I で微分可能のときは，「I で $f'(x)>0$ ならば I_0 で $f(x)$ は増加」といえる．

☞ A 3.1 平均値の定理の応用

B.348

$f(x)$ は，区間 $I=\{x\,|\,a<x<b\}$ で2回微分可能で，$f''(x)<0$ であるとする．

(1)　$\alpha\in I$，$\beta\in I$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p+q=1$　であれば

$$f(p\alpha+q\beta)\geqq pf(\alpha)+qf(\beta)$$

であることを示せ．

(2)　(1)を利用して，x_1，x_2，$x_3\in I$　に対し，

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

が成りたつことを示せ．

解答　(1)　$\alpha=\beta$ の場合の成立は自明なので，$\alpha\neq\beta$ とする．

$p+q=1$ を用いて，q を消去し，α，β を固定して

$$F(p)=f(p\alpha+(1-p)\beta)-pf(\alpha)-(1-p)f(\beta)$$

とおくと

$$F'(p)=(\alpha-\beta)f'(p\alpha+(1-p)\beta)-f(\alpha)+f(\beta)$$

$$\therefore\quad F''(p)=(\alpha-\beta)^2f''(p\alpha+(1-p)\beta)$$

となるので，f についての仮定より

$p\alpha+(1-p)\beta\in I$ ▶

$$p\in[0,\ 1]\Longrightarrow F''(p)<0$$

したがって，$F(p)$ のグラフは区間 $[0,\ 1]$ で上に凸であるが，他方

$$F(0)=0,\quad F(1)=0$$

$F(p)$
p
O
1

であるから，

$$0\leqq p\leqq 1\Longrightarrow F(p)\geqq 0$$

$$\therefore\quad f(p\alpha+(1-p)\beta)\geqq pf(\alpha)+(1-p)f(\beta)$$

$$\therefore\quad f(p\alpha+q\beta)\geqq pf(\alpha)+qf(\beta)$$

(2)　(1)で証明した不等式において

$\alpha\in I$，$\beta\in I$ ▶

$$p=\frac{1}{3},\quad q=\frac{2}{3},\quad \alpha=x_1,\quad \beta=\frac{x_2+x_3}{2}$$

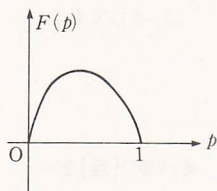
とおくと　$f\left(\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{x_2+x_3}{3}\right)\geqq\dfrac{1}{3}f(x_1)+\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)$　……①

また，　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$\alpha=x_2$，$\beta=x_3$　とおくと

$f\left(\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3\right)\geqq\dfrac{1}{2}f(x_2)+\dfrac{1}{2}f(x_3)$　………②

が成りたつ．①，②より

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\quad\blacksquare$$

$f(x)=\log x$ のとき，相加相乗平均の不等式を導く． ▶

B. 349

(1)　$x>0$ のとき $e^x>\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)を利用して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を証明せよ。

アプローチ　B. 217 で仮定した事実についての証明です。

解答　(1)　$f(x)=2e^x-x^2$ とおくと，

$$f'(x)=2(e^x-x)$$
$$f''(x)=2(e^x-1)$$

$x>0$ においては $e^x>1$ であるから $f''(x)>0$。

よって，$x\geqq 0$ で $f'(x)$ は増加する。

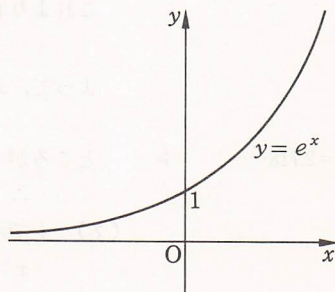
さらに $f'(0)=2>0$ だから

$$x>0 \text{ において } f'(x)>0.$$

よって，$x\geqq 0$ で $f(x)$ は増加。

さらに $f(0)=2>0$ だから

$$x>0 \text{ において } f(x)>0$$

である。これが示すべき不等式である。

(2)　$x>0$ において　$e^x>\dfrac{x^2}{2}$　より

$$x>0 \Longrightarrow \frac{2}{x}>\frac{x}{e^x}>0 \quad\cdots\cdots①$$

①において $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ■

◀ はさみうちの定理

［注］　一般に，任意の自然数 n について

$$“x>0 \Longrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}”$$

が成立する。これを用いると，　$e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\therefore\quad \frac{(n+1)!}{x}>\frac{x^n}{e^x}>0$$

が得られ，これより，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を導くことができる。*cf*. B. 217

B.350

(1) $x>0$ のとき $\log x<\sqrt{x}$ が成立することを示せ.

(2) (1)を利用して, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を証明せよ.

解答 (1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x \quad (x>0)$

とおき, $f(x)>0$ を示せばよい.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

これより右の増減表をうる.

x	(0)		4	
f'		$-$	0	$+$
f		↘		↗

よって, $x>0$ のとき

$$f(x)\geqq f(4)=2(1-\log 2)$$

$e=2.718\cdots\cdots$ ▶ ところが $e>2$ であるから $\log 2=\log_e 2<1$

$\therefore$ $x>0$ のとき $f(x)\geqq f(4)>0$ である.

(2) 上で示したことから

$x>0$ においては $\log x<\sqrt{x}$

したがって, 特に

$x>1$ においては $0<\log x<\sqrt{x}$

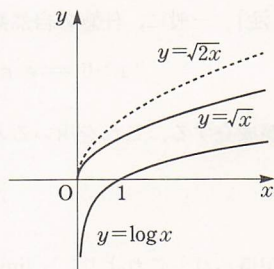
$$\therefore \quad 0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

前問と関連づけてこの結果をうる議論については ☞ B.217 ▶ $x\to+\infty$ のとき①の両端はともに0に収束するので,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$ がわかる. ■

[注] 右図からわかるように(1)で証明した $\log x<\sqrt{x}$ という $\log x$ の評価は, 前問 B.349 で用いた $e^x>\dfrac{x^2}{2}$ という不等式と本質的に同値な $\log x<\sqrt{2x}$ という評価より, 精度の良いものである.

なお, 本問(2)と前問(2)は互いに一方から他方を導くことが出来る.

(たとえば前問の式において $x=\log y$ とおく.) (☞ B.217)

B. 351

(1)　$x>0$ のとき

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$ が成立することを示せ。

(2)　ついで，これを利用し，n を正整数とするとき

$$P_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

として，$\lim_{n\to\infty}P_n$ を求めよ。

解答　(1)　$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと，

$$x>0 \Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}>0$$

よって，$x\geqq 0$ で $f(x)$ は増加で，$f(0)=0$ であるから

◀ B. 347　[注] 2°

$x>0$ でつねに $f(x)>0$。

同様に，$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと

$$g(0)=0,\qquad x>0 \Longrightarrow g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$ より

$x>0$ でつねに $g(x)>0$。 ■

(2)　$\log P_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$

◀ $\log P_n$ を作ると(1)と結びつく。

(1)の不等式で $x=\dfrac{k}{n^2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおいた式を加えあわせると，

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2<\log P_n<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\therefore\quad \frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}<\log P_n<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1+n^{-1}}{2}-\frac{(1+n^{-1})(2+n^{-1})}{12n}<\log P_n<\frac{1+n^{-1}}{2}.$$

$n\to\infty$ のとき，上の不等式の両端はともに 1/2 に収束するので，

$$\log(\lim_{n\to\infty}P_n)=\lim_{n\to\infty}\log P_n=\frac{1}{2}=\log e^{\frac{1}{2}}$$

◀ はさみ打ちの定理

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n=\sqrt{e}$$

◀ 対数関数の連続性と 1：1 性を用いた。

B.352

(1)　$x \geqq 1$ のとき $x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)$ が成りたつことを示せ．

(2)　3以上の自然数 n に対して $(n!)^2 > n^n$ が成りたつことを示せ．

解答　(1)　$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ とおくと

$$f'(x)=\log x-\log(x+1)+\frac{2}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{-x+1}{x(x+1)^2}$$

☞B. 347［注］2° ▶

したがって，区間 $x>1$ では $f''(x)<0$ であり，$f'(x)$ は，区間 $x \geqq 1$ で連続であるから，$f'(x)$ は，区間 $x \geqq 1$ で減少するが，一方

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\frac{1}{1+1/x}+\frac{2}{x+1}\right\}=0$$

だから，区間 $x \geqq 1$ で $f'(x)>0$ であり，区間 $x \geqq 1$ で連続関数 $f(x)$ は増加する．そして $f(1)=0$ であるから，$x \geqq 1$ ならば，つねに $f(x) \geqq 0$

$$\therefore\quad x\log x \geqq (x-1)\log(x+1)\ \blacksquare$$

(2)　数学的帰納法で証明する．まず $n=3$ のときは

$$(3!)^2=36,\ 3^3=27$$

より，成立する．そこで，ある $n(\geqq 3)$ について $(n!)^2>n^n$ が成りたつとすると

$$\{(n+1)!\}^2=(n+1)^2(n!)^2$$

$$>(n+1)^2\cdot n^n \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

となるが，一方(1)で証明したことから

$$n\log n \geqq (n-1)\log(n+1)$$

$$\therefore\quad n^n \geqq (n+1)^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より

$$\{(n+1)!\}^2>(n+1)^{n+1}$$

すなわち，$n+1$ のときも成立する．■

研究　実は，十分大きな n については $n!$ は，$\sqrt{2\pi}\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ で近似できる（スターリングの公式）．

B.353

x の実係数多項式 $P(x)$ について，次の 2 条件が同値であることを証明せよ．

(i)　方程式 $P(x)=0$ は，$x=\alpha$ を三重解としてもつ．

(ii)　$P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=0$　かつ　$P'''(\alpha)\neq 0$

アプローチ　n 重解の定義より，(i)は

(i′)　$P(x)$ は $(x-\alpha)^3$ で割りきれるが，$(x-\alpha)^4$ では割りきれない

という条件と同値ですから，(i′) と(ii)が同値であることを示せばよいのです．

解答　（1）　(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$$P(x)=(x-\alpha)^3Q(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

とおける．ここで $Q(x)$ は x の整式であるが，$x-\alpha$ で割りきれないことから，　$Q(\alpha)\neq 0$　$\cdots\cdots\cdots$ ②

である．さて積の微分公式により

$$P'(x)=3(x-\alpha)^2Q(x)+(x-\alpha)^3Q'(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①'$$

$$P''(x)=6(x-\alpha)Q(x)+6(x-\alpha)^2Q'(x)+(x-\alpha)^3Q''(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①''$$

$$P'''(x)=6Q(x)+18(x-\alpha)Q'(x)+9(x-\alpha)^2Q''(x)+(x-\alpha)^3Q'''(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①'''$$

であるから，①，①′，①″ に $x=\alpha$ を代入すれば，

$$P(\alpha)=0,\ P'(\alpha)=0,\ P''(\alpha)=0$$

を得，また①‴ に代入して，②を用いれば

$$P'''(\alpha)\neq 0$$

が得られる．

（2）　(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$P(x)$ を $(x-\alpha)^3$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを

$$a(x-\alpha)^2+b(x-\alpha)+c$$

とおくと，次式が成立する：

$$P(x)=(x-\alpha)^3Q(x)+a(x-\alpha)^2+b(x-\alpha)+c. \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

両辺を x で微分していくと

$$P'(x)=(x-\alpha)^3Q'(x)+3(x-\alpha)^2Q(x)+2a(x-\alpha)+b \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

$$P''(x)=(x-\alpha)^3Q''(x)+6(x-\alpha)^2Q'(x)+6(x-\alpha)Q(x)+2a \quad \cdots\cdots\cdots ③''$$

$$P'''(x)=(x-\alpha)^3Q'''(x)+9(x-\alpha)^2Q''(x)$$
$$+18(x-\alpha)Q'(x)+6Q(x) \qquad \cdots\cdots ③'''$$

が順次得られる．

③，③′，③″，③‴ に $x=\alpha$ を代入して，仮定を用いると，

$c=0$；$b=0$；$a=0$；$Q(\alpha)\neq 0$

が次々と得られ，これは，

　$P(x)$ が $(x-\alpha)^3$ で割りきれ，$(x-\alpha)^4$ では割りきれないことを意味する．■

研究　一般の自然数 n に対し

　(i)$_n$ 方程式 $P(x)=0$ は $(x-\alpha)^n$ で割りきれる

　(ii)$_n$ $P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots\cdots=P^{(n-1)}(\alpha)=0$

の2条件が同値であることが（たとえば，n に関する数学的帰納法を用いることにより）証明できる．本問の結果は $n=3$ と $n=4$ の場合を用いて示すことも出来る．

（　問題文の(i) $\iff$ “(i)$_3$” かつ “(i)$_4$ の否定

　　　　　　　$\iff$ “(ii)$_3$” かつ “(ii)$_4$ の否定”

　　　　　　　$\iff$ 問題文の(ii)　）

　なお，A 篇でも述べたように，解 α は実数解に限らず，虚数解であっても結果は成立する．

α が実数でないとき，$P'(\alpha)$ を “$x=\alpha$ における微分係数” と見なすのは現段階では無理だが，今 $P(x)$ は多項式だから，「多項式の微分」 $((x^n)'=nx^{n-1})$ という操作を先に考え，$P'(\alpha)$ は $P'(x)$ に $x=\alpha$ を代入したものと考える．そうすれば，上で述べた議論はそのまま有効である．たとえば，本問の解答において各自確認してほしい．

B. 354

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする．

$f(x)$ が $f'(x)$ で整除されるなら，$f(x)=(x-\alpha)^4$ と書けることを示せ．

アプローチ $f(x)$ を $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ で割っていくのも，また，

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=(Ax+B)(4x^3+3ax^2+2bx+c)$$

とおいて，未定係数法を使うのも，見通しがよくありません．

解答 $f'(x)$ は $f(x)$ より1次低いから，$f(x)$ が $f'(x)$ で整除されるなら

$$f(x)=(Ax+B)f'(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と書ける．両辺の最高次の係数の比較から $A=\dfrac{1}{4}$ がわかる．

さらに，$\alpha=-4B$ とおくと，①は

$$4f(x)=(x-\alpha)f'(x) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と書けることになる．

②の両辺を x で微分すると

$$4f'(x)=f'(x)+(x-\alpha)f''(x)$$

$$\therefore\quad 3f'(x)=(x-\alpha)f''(x). \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

③を x で微分すると

$$3f''(x)=f''(x)+(x-\alpha)f'''(x)$$

$$\therefore\quad 2f''(x)=(x-\alpha)f'''(x). \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

④を x で微分すると同様にして

$$f'''(x)=(x-\alpha)f^{(4)}(x). \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

②〜⑤から

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)$$
$$=f'''(\alpha)=0$$

ゆえに，

$f(x)$ は，$(x-\alpha)^4$ で割りきれる．

すなわち，

$$f(x)=(x-\alpha)^4g(x) \qquad (g(x)\text{ はある整式})$$

とかける．

ところが，$f(x)$ は最高次の係数1の4次式であるから，

$g(x)=1$ となり，結局

$$f(x)=(x-\alpha)^4. \quad ■$$

［注］ ②〜⑤から結論の式を導くのに，つぎのように推論してもよい．

「②〜⑤から　　　$4!f(x)=(x-\alpha)^4\cdot f^{(4)}(x)$

一方，$f(x)$ は最高次の係数 1 の 4 次式であるから，$f^{(4)}(x)=4!$ である．」

研究　②から　$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{4}{x-\alpha}$　この両辺を積分すれば

$$\log|f(x)|=4\log|x-\alpha|+\text{定数}$$

$$\therefore\quad f(x)=A(x-\alpha)^4\quad (A \text{ は定数})$$

が簡単に得られる．この論法によれば，より一般に，

“$f(x)$ が n 次の整式のとき，$f(x)$ が $f'(x)$ で整除されるならば

$f(x)=A(x-\alpha)^n$　（A，α は定数）　と書ける”

ことがすぐわかる．

この結果は，もちろん他の方法を用いても示せる．たとえば前問の結果（n 乗根をもつ条件）を用いる．

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots\cdots\cdots(x-\alpha_m)^{n_m}\quad (n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$$

となっているとする．前問の結果を用いると

$$f'(x)=(x-\alpha_1)^{n_1-1}(x-\alpha_2)^{n_2-1}\cdots\cdots(x-\alpha_m)^{n_m-1}\times g(x)$$

（$g(x)$ は $(m-1)$ 次式で，α_1，…，α_m を根にもたない）

となっているはずである．$f(x)$ が $f'(x)$ で割り切れるならば，$g(x)$ は定数でなければならない，すなわち $m-1=0$ でなければならない．これは $f(x)=(x-\alpha)^n$ となっていることを意味する．

B.355

鉛直な壁に立てかけた長さ5mのハシゴがある．その下端を毎秒12cmの一定の速さで水平に引く．

下端が壁から3mになった瞬間における上端の速さ，および加速度を求めよ．

解答 長さの単位としてm，時間の単位として秒 をとり，以下，単位を省略して書く．

図のように座標軸をとり，下端A，上端Bの座標をA(x, 0)，B(0, y)とすると

$$x^2+y^2=5^2.\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

この両辺を時間tで微分すると

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0. \quad \cdots\cdots ②$$

◀「両辺をtで微分する」のがカギ．

さらに両辺をtで微分すると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y\frac{d^2y}{dt^2}=0. \quad \cdots\cdots ③$$

さて，①より　$y|_{x=3}=4.$　$\cdots\cdots$ ④

また，仮定よりつねに

$$\frac{dx}{dt}=0.12 \quad \cdots\cdots ⑤, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \cdots\cdots ⑥$$

まず，②に $x=3$ と④，⑤とを代入して

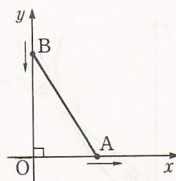
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3}=-\frac{3}{4}\cdot 0.12=-0.09 \quad \cdots\cdots ⑦$$

速さは**下向きに 9 cm/秒**

つぎに，③に $x=3$ と，④，⑤，⑥，⑦を代入して

$$(0.12)^2+3\cdot 0+(-0.09)^2+4\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{x=3}=0$$

$$\therefore \quad \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{x=3}=-0.005625$$

加速度は**下向きに 0.5625 cm/秒^2**

［注］⑤を用いてxを直接にtの関数として表し，それと①から

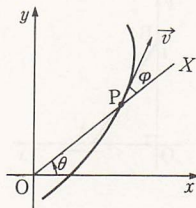
$$y=\sqrt{5^2-(c+0.12t)^2} \quad (c\text{ は } t=0 \text{ のときの } x \text{ の値})$$

としても解けるが，上に示したように，陰関数のまま処理する方が，見通しが良い．

B.356

半直線OXが点Oのまわりに毎秒1ラジアンの角速度で回転している．OX上を運動する動点Pが時刻 t 秒において，点Oから e^{2t} の距離にあるという．

(1) 時刻 t 秒におけるPの速さを求めよ．

(2) Pの速度の方向とOXとのなす角 φ は時刻によらぬことを示せ．

解答 Oを原点，$t=0$ におけるOXを x 軸とする座標系をとり，時刻 t 秒におけるPの座標を (x, y) とし，OPを r，OXの回転角を θ と書くと，

$$r=e^{2t},\ \theta=t \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

であるから

$$x=e^{2t}\cos t,\ y=e^{2t}\sin t \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

これより

$$\frac{dx}{dt}=e^{2t}(2\cos t-\sin t),\ \frac{dy}{dt}=e^{2t}(2\sin t+\cos t) \cdots ③$$

(1) ③を，$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ に代入して，

$$|\vec{v}|=\sqrt{5}\,e^{2t} \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ ▶ を用いる．

(答) $\sqrt{5}\,e^{2t}$/秒

(2) φ は $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ と $\overrightarrow{OP}=(x, y)$ とのなす角であるから，

$$\cos\varphi=\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\vec{v}||\overrightarrow{OP}|}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{|\vec{v}|r}$$

これに①，②，③，④を代入すると，

$$\cos\varphi=\frac{2e^{4t}}{\sqrt{5}\,e^{4t}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=一定$$

よって，φ は時刻によらず一定である． ■

［注］ ③を $\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}\cos t\\ e^{2t}\sin t\end{pmatrix}$ ……(＊) とまとめると，速度 $\vec{v}$ が，$\overrightarrow{OP}$ を行列 $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\sqrt{5}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ $\left(ただし，\alpha は \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}} を満たす角\right)$ の表す1次変換で移したものであることがわかる．この事実に気づけば，上の(1)，(2)は明らかである．

B. 357

xy 平面上の曲線 $y=\sin x$ 上，左から右に進む動点Pがある．Pの速さ $|\vec{v}|$ が一定 $V\,(V>0)$ であるとき，Pの加速度 $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ の最大値を求めよ．

解答　時刻 t におけるPの座標を $(x,\ y)$（ただし $y=\sin x$）とおくと，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\cos x\frac{dx}{dt} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ \cos x\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}(1,\ \cos x)$$

$$\therefore\quad |\vec{v}|=\left|\frac{dx}{dt}\right|\sqrt{1+\cos^2 x}=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\cos^2 x}\ \left(\because\quad \frac{dx}{dt}>0\right)$$

◀「左から右へ進む」

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{V}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀ これから x の形を見出すのはタイヘン．

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=-\frac{V\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}}\cdot\frac{V}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$=\frac{V^2\cos x\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

一方，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\cos x\frac{dx}{dt}\right) \qquad (①を代入)$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\cos x\right)\frac{dx}{dt}+\cos x\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$=-\sin x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\cos x\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$=\frac{-V^2\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{V^2\cos^2 x\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} \qquad (②，③を代入)$$

$$=\frac{-V^2\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}$$

$\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ であるから

$$\therefore\quad |\vec{a}|^2=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2=\frac{V^4}{(1+\cos^2 x)^4}\sin^2 x(\cos^2 x+1)$$

$$=V^4\frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}$$ となる．

そこで $1+\cos^2 x=u$ とおき，$1\leqq u\leqq 2$ における

$$f(u)=\frac{2-u}{u^3}=2u^{-3}-u^{-2}$$

の増減を調べると，

$$f'(u)=-6u^{-4}+2u^{-3}=\frac{2u-6}{u^4}<0$$

より，$1\leqq u\leqq 2$ において $f(u)$ は減少するから，$f(u)$ が最大値をとるのは $u=1$ のときである．

したがって $|\vec{\alpha}|$ が最大になるのは

$$\cos x=0$$

のときで，このとき，$\sin^2 x=1$ となるから $|\vec{\alpha}|^2$ は，V^4 となる．

(答)　$|\vec{\alpha}|$ の最大値は V^2

研究　一般の曲線 $y=f(x)$ 上をPが左から右へ運動するときは，上と同様にして

$$|\vec{v}|=\frac{dx}{dt}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=V$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{V}{\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{V^2f'(x)f''(x)}{\{1+(f'(x))^2\}^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f''(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+f'(x)\frac{d^2x}{dt^2}=V^2\frac{f''(x)}{\{1+(f'(x))^2\}^2}$$

$$\therefore\quad |\vec{\alpha}|^2=\frac{V^4\{f''(x)\}^2}{\{1+(f'(x))^2\}^3}$$

$$\therefore\quad |\vec{\alpha}|=\frac{V^2|f''(x)|}{\{1+(f'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

が導かれる．

ところで，等速円運動の場合，半径を r，速さを V とすると，加速度の大きさが $\dfrac{V^2}{r}$ で与えられることは，物理でも習っているであろう．したがって (*) は，曲線 $y=f(x)$ 上を等速運動する点のうける加速度が，半径

$$\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}^{\,3}}{|f''(x)|}\quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

の円運動の場合と等しいことを意味している．いいかえれば，曲線 $y=f(x)$ の点 $(x, f(x))$ における曲線の曲がり方は，半径 (**) の円のそれと一致することになる．実は，この (**) が B. 213，B. 303 で話題としてきた曲率円の半径の公式にほかならないわけである．

B.358

xy 平面上の動点Pは，一定の速さ1で曲線 $C:(x(t),\ y(t))$ を描いているとする．いま，新しい曲線 $E:(a(t),\ b(t))$ を

$$a(t)=x(t)+\frac{x''(t)}{(x''(t)^2+y''(t)^2)},\quad b(t)=y(t)+\frac{y''(t)}{(x''(t)^2+y''(t)^2)}$$

で定義する(常に $x''(t)^2+y''(t)^2\neq 0$ と仮定する)．

各時刻 t において，C の接線と E の接線は互いに直交することを示せ．

アプローチ 時刻 t における"速度ベクトル"$(x'(t),\ y'(t))$，$(a'(t),\ b'(t))$ が互いに垂直であることを示します．図形的意味は研究で説明します．

解答 点Pの速さが1であることより

$$x'^2+y'^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

($x'(t)$ を x' とかく．以下同様．)

である．この両辺を次々に微分して（t の関数と思って微分）

$$x'x''+y'y''=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x''^2+y''^2+x'x'''+y'y'''=0 \quad \cdots\cdots ③$$

となる．$S(t)=x''(t)^2+y''(t)^2$ と表わすことにすると

$$a'=x'+\frac{x'''S-x''S'}{S^2},\quad b'=y'+\frac{y'''S-y''S'}{S^2}$$

より

$$\begin{aligned}x'a'+y'b'&=x'^2+y'^2\\&\quad+\frac{1}{S}(x'x'''+y'y''')-\frac{S'}{S^2}(x'x''+y'y'')\\&=x'^2+y'^2-\frac{1}{S}(x''^2+y''^2)\\&=1-1\\&=0\end{aligned}$$

（速度ベクトルどうしの内積；②，③；①）

よって，$(x',\ y')$，$(a',\ b')$ は互いに垂直である． ■

研究 曲線Cの $(x(t),\ y(t))$ における曲率半径 $\rho(t)$ は

$$\rho(t)=(x''(t)^2+y''(t)^2)^{-\frac{1}{2}}=S(t)^{-\frac{1}{2}}$$

である．よって，曲線EはCの曲率円の中心の軌跡を表わしている．

本文の結果はCの法線(接線とその接点で垂直に交わる直線)が常にEに接することを示している．

実は $a'^2+b'^2=\rho'^2$ が証明でき，このことから，C はEに巻きつけた糸をたるまぬように引っ張りながらほぐした時に，その糸の端の描く曲線になっていることがわかる．C をEの伸開線，E をCの縮閉線という．楕円の縮閉線はアステロイド，サイクロイドの縮閉線は合同なサイクロイドになる．円の伸開線についてはB. 515.

B. 359

平均値の定理を用いて，つぎの各極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=m$ であるときの $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\{f(x+a)-f(x)\}$

ただし，a，m は定数で，$a>0$ とする．

解答 (1) $f(t)=\sin t$ に対して，

$x>0$ のとき　$\sin x\leqq t\leqq x$
$x<0$ のとき　$x\leqq t\leqq \sin x$
の区間に対して平均値の定理を用いる．

▶ $x>0$ なら $\sin x<x$，$x<0$ なら $\sin x>x$

$$\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}$$
$$=f'(\theta)=\cos\theta \quad\cdots\cdots\text{①}$$

ただし，θ は x，$\sin x$ の間のある値　………②

が成立する．

▶ $x>0$ なら，$\sin x<\theta<x$，$x<0$ なら $x<\theta<\sin x$

$x\to 0$ のとき $\sin x\to 0$ であるから，②より $\theta\to 0$ となる．

そこで，①より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=\mathbf{1}$$

(2) 区間 $[x,\ x+a]$ において $f(x)$ に対し平均値の定理を適用する．すなわち，

$$x<c<x+a \quad\cdots\cdots\text{③}$$

で，かつ

$$\frac{f(x+a)-f(x)}{(x+a)-x}=f'(c)$$

すなわち

$$f(x+a)-f(x)=af'(c) \quad\cdots\cdots\text{④}$$

をみたす c が存在する．

$x\to+\infty$ のとき③より $c\to+\infty$ であるから，④より

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x+a)-f(x)\}=\lim_{c\to+\infty}af'(c)=\boldsymbol{am}$$

▶ 仮定 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=m$ を用いた．

［注］ (2)において，条件：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=m$ は直観的には

「十分大きい x に対して $f(x)$ は $mx+n$ に近い．(n はある定数)」

を意味する．このことを考慮すれば，$f(x+a)-f(x)\longrightarrow am$ $(x\to\infty)$ となることも納得できよう．ただし，これでは，証明としての説得力にやや乏しい．

B.360

$f(x)=x^3$ とする．

$x>0,\ h>0$ のとき，平均値の定理より

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)\ \cdots\cdots ①,\qquad 0<\theta<1\ \cdots\cdots ②$$

をともにみたす θ の存在が保証されているが，この θ を具体的に求め，これから，x を固定したとして，$\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ．

アプローチ θ は(x を固定すると) h に依存する，すなわち h の関数です．

解答 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3hx+h^2\ \cdots\cdots ③$$

一方，$f'(x)=3x^2$ だから

$$f'(x+\theta h)=3(x+\theta h)^2=3x^2+6xh\theta+3h^2\theta^2\ \cdots\cdots ④$$

③，④より，①の等式は

$$3h\theta^2+6x\theta-(3x+h)=0\ \cdots\cdots ⑤$$

◀ θ の2次方程式

と同値である．⑤の左辺を $F(\theta)$ とおくと，

$x>0,\ h>0$ より

$$F(0)=-(3x+h)<0$$
$$F(1)=3x+2h>0$$

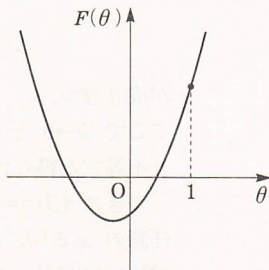
であるから，②をみたす θ は1個のみで，それは⑤の大きい方の根である．

$$\therefore\ \theta=\frac{-3x+\sqrt{9x^2+3h(3x+h)}}{3h}$$

分子を有理化すると，

$$\theta=\frac{\{9x^2+3h(3x+h)\}-(3x)^2}{3h(3x+\sqrt{9x^2+3h(3x+h)})}=\frac{3x+h}{3x+\sqrt{9x^2+3h(3x+h)}}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\theta=\frac{3x}{3x+\sqrt{9x^2}}=\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$$

◀ この結果は⑤で $h\to 0$ としてただちに得ることも出来る．

研究 $f''(x)$ が連続であるなら，一般に

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)\ \text{かつ}\ 0<\theta<1$$

をみたす θ について，x を固定して $h\to 0$ としたときの θ の極限値は $f''(x)\neq 0$ のときには，$f(x)$ の形，x によらず $\dfrac{1}{2}$ となることが証明できる．

B. 361

(1) 開区間 $(a,\ b)$ で微分可能な関数 $f(x)$ と定数 K に対し，つぎの 2 条件が同値であることを示せ．

(α) 任意の $x_1\in(a,\ b)$，$x_2\in(a,\ b)$ に対し，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq K|x_1-x_2|$$

(β) 任意の $x\in(a,\ b)$ に対し，

$$|f'(x)|\leqq K$$

(2) $1<u<v<3$ となる任意の u，v に対し，

$$|ue^{1-u}-ve^{1-v}|\leqq K|u-v|$$

が成立するような K の値の範囲を求めよ．

解答 (1) (α) $\Longrightarrow$ (β) を示す．

まず，任意の $x\in(a,\ b)$ をとる．$|h|$ が十分小さな正数となるように h をとれば，$x+h$ も区間 $(a,\ b)$ に含まれるから，$x_1=x+h$，$x_2=x$ とおけば，(α) より

$$|f(x+h)-f(x)|\leqq K|h|$$

$$\therefore\quad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqq K$$

が成り立つ．

ここで $h\to0$ とすれば，左辺は $|f'(x)|$ に収束するので，証明すべき不等式が得られる．

つぎに (β) $\Longrightarrow$ (α) を示す．

任意の $x_1\in(a,\ b)$，$x_2\in(a,\ b)$ をとる．$x_1=x_2$ なら，証明すべき結論は自明だから，$x_1\neq x_2$ と仮定する．

すると平均値の定理より，適当な $x_3\in(a,\ b)$ を用いて

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_3)(x_1-x_2)$$

$$\therefore\quad |f(x_1)-f(x_2)|=|f'(x_3)||x_1-x_2|$$

と表せるが，ここで (β) より

$$|f'(x_3)|\leqq K$$

であることを用いると

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq K|x_1-x_2| \quad ■$$

(2) 上で示したことから，$f(x)=xe^{1-x}$ とおいたとき，

任意の $x\in(1,\ 3)$ に対して，$|f'(x)|\leqq K$ ………(＊)

が成立するような K の最小値を求めればよいが，

$$f'(x)=(1-x)e^{1-x}$$
$$\therefore\quad f''(x)=(x-2)e^{1-x}$$

より，$f'(x)$ の増減は右表のようになるので，区間 $(1,\ 3)$ における $|f'(x)|$ のとりうる値の範囲は，

x	(1)		2		(3)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	(0)	↘	$-e^{-1}$	↗	$-2e^{-2}$

$$0<|f'(x)|\leqq e^{-1}$$

である．したがって，(＊)が成立するような K の範囲は

$$\boldsymbol{K\geqq e^{-1}}$$

［注］ (1)で証明したのは，“微分可能な関数について平均変化率(割線の傾き)の絶対値がつねに K 以下であるための必要十分条件は接線の傾きの絶対値がつねに K 以下である”という，図を描いて見れば，当然の事実である．

B.362

k を1より小さな正数とする．区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能な関数 $f(x)$ が，次の二条件をともに満たすとする：

$$\begin{cases} \text{i)}\quad a\leqq x\leqq b \Longrightarrow a<f(x)<b, \\ \text{ii)}\quad a<x<b \Longrightarrow |f'(x)|\leqq k. \end{cases}$$

(1)　方程式 $x=f(x)$ は，区間 $(a,\ b)$ に唯一の実根をもつことを示せ．

(2)　(1)の実根を α とおく．漸化式 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{x_n\}$ は，x_1 が区間 $[a,\ b]$ のどんな値であっても，つねに，α に収束することを証明せよ．

解答　(1)　$F(x)=x-f(x)$ とおくと，$F(x)$ は，$[a,\ b]$ で連続で，

$$\begin{cases} F(a)=a-f(a)<0 \\ F(b)=b-f(b)>0 \end{cases}$$

であるから，中間値の定理により，区間 $(a,\ b)$ に

$$F(x)=0\quad すなわち\quad x=f(x)$$

となる x の値が存在する．しかも，$F(x)$ は $(a,\ b)$ で微分可能で

$$F'(x)=1-f'(x)\geqq 1-k>0$$

であることから，$F(x)$ は $[a,\ b]$ で増加関数である．したがって，

$$F(x)=0$$

となる x の値が2つ以上存在することはない．■

(2) ある x_n について $x_n=\alpha$ となるなら，$x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots\cdots=\alpha$ となり，$\{x_n\}$ は α に収束するから，$x_n\neq\alpha$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ の場合を考えればよい．

$$\begin{array}{rl} & x_{n+1}=f(x_n) \\ -) & \alpha=f(\alpha) \\ \hline & x_{n+1}-\alpha=f(x_n)-f(\alpha) \end{array}$$

ここで，"$x_n\neq\alpha$" ▶ が効く．

この右辺に平均値の定理を適用すると，ある $x_n'\in(a, b)$ に対し

$$f(x_n)-f(\alpha)=(x_n-\alpha)f'(x_n')$$

とおけるから，

$$|x_{n+1}-\alpha|=|f(x_n)-f(\alpha)|=|x_n-\alpha|\cdot|f'(x_n')|.$$

よって，不等式

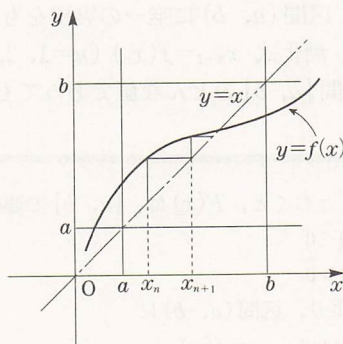
$$|x_{n+1}-\alpha|\leqq k|x_n-\alpha|$$

が任意の $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ について成りたつ．これより

$$|x_n-\alpha|\leqq k^{n-1}|x_1-\alpha| \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

が得られるが，$0<k<1$ より，$n\to\infty$ とすると，右辺は，x_1 の値によらず，限りなく 0 に近づく．したがって，左辺も限りなく 0 に近づく．すなわち，x_1 によらず

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha \quad ■$$

研究　本問は，B. 117，B. 118 で扱った数列の極限についての問題の一般化である．下図を参照すれば，$x_n\to\alpha$ $(n\to\infty)$ の様子が納得できよう．

B. 363

区間 $[a,\ b]$ において，

$$f''(x)>0 \text{ かつ } f(a)<0 \text{ かつ } f(b)>0 \text{ ならば，}$$

(1) 方程式 $f(x)=0$ は，区間 $(a,\ b)$ においてただ1つの実数解をもつことを示せ．

(2) $$\begin{cases} x_1=b \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

で定められる数列 $\{x_n\}$ は単調減少で(1)の実数解 α に収束することを示せ．必要なら，「有界な単調列は収束する」という事実を用いよ．

アプローチ 「ニュートン法」と呼ばれる，方程式の解の近似法です（☞ A 3.5 Ⅱ）．

解答 （1） $f(a)<0$ かつ $f(b)>0$ より，区間 $(a,\ b)$ に $f(x)=0$ となる x は少なくとも1つある．そこで，2つ以上存在するとして矛盾を導こう．

$$f(x_1)=f(x_2)=0, \qquad a<x_1<x_2<b$$

とすると，ロルの定理より

$$f'(x_3)=0, \qquad a<x_1<x_3<x_2<b$$

となる x_3 が存在するが，

$$f''(x)>0$$

だから，$f'(x)$ は単調に増加するので，

$$a<x<x_3 \Longrightarrow f'(x)<0$$

したがって，区間 $[a,\ x_3]$ で $f(x)$ は減少するから

$$a \leqq x \leqq x_3$$

ならばつねに

$$f(x) \leqq f(a)<0$$

となるが，x_1 は

$$a<x_1<x_3 \text{ であってしかも } f(x_1)=0$$

だから，矛盾する．

ゆえに，

方程式 $f(x)=0$ の実数解は $(a,\ b)$ にただ1つ存在する．■

（2）　まず，$f'(\alpha)>0$ を示す．

$$f'(\alpha)\leqq 0$$

と仮定すると，f' の単調増加性によって

$a\leqq x<\alpha$ ならばつねに $f'(x)<0$

したがって，区間 $[a,\ \alpha]$ で $f(x)$ は減少することになるが

$$f(a)<0=f(\alpha)$$

より，これは不可能である．

したがって，$f'(\alpha)>0$ であり，さらに

$\alpha<x<b$ ならばつねに $f'(x)>0$

である．さて，$x_n>\alpha$ とすると，$f'(x_n)>0$ であるから，x_{n+1} が定義できて

$$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{f'(x_n)}\quad(\because\quad f(\alpha)=0)$$

$$=(x_n-\alpha)\left\{1-\frac{f'(x_n')}{f'(x_n)}\right\}\qquad\cdots\cdots①$$

となる x_n' をとることができる(平均値の定理)．

ところで，$x_n>\alpha$ より，$x_n>x_n'>\alpha$

$$\therefore\quad f'(x_n)>f'(x_n')>f'(\alpha)>0$$

$$\therefore\quad 0<\frac{f'(x_n')}{f'(x_n)}<1\qquad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$0<x_{n+1}-\alpha<x_n-\alpha\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となるから，　$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots\cdots>\alpha$

すなわち，数列 $\{x_n\}$ は，下に有界な減少列だから，極限値をもつ．その値を β とおくと，$\beta\geqq\alpha$ であるから $f'(\beta)\geqq f'(\alpha)>0$ である．よって，与えられた漸化式で $n\to\infty$ とすれば

$$\beta=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}\qquad\therefore\quad f(\beta)=0$$

ゆえに，β は，$f(x)=0$ の区間 $[a,\ b]$ における解である．

$$\therefore\quad \beta=\alpha\quad ■$$

［注］　$f(a)>0$，$f(b)<0$ の場合は，$x_1=a$ とすれば $\{x_n\}$ が増加列で，α に収束する．

B.364

f が 2 回微分可能であり，f'' が連続であるときには，$h(\fallingdotseq 0)$ に対して

$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+hf'(a)$

という近似式が成りたつことを利用して $\sqrt[5]{1000}$ の近似値を求めよ．

アプローチ 1000 に近い数で 5 乗根がキレイな数になるものを探すと $4^5=2^{10}=1024$ があります．これから，ともかく $\sqrt[5]{1000} \fallingdotseq 4$ がわかります．ですが，もっと良い近似値が欲しいのです．

解答 $4^5=1024$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1000}&=1000^{\frac{1}{5}}\\&=4\left(\frac{1000}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\\&=4\left(\frac{1024}{1000}\right)^{-\frac{1}{5}}\\&=4\left(1+\frac{24}{1000}\right)^{-\frac{1}{5}} \qquad\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

さて，$f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{5}}$ を考えると $f'(x)=-\frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{6}{5}}$ であるから，近似式

◀ この f は問題文の条件を明らかにみたす．

$$h \fallingdotseq 0 \quad \text{のとき} \quad (1+h)^{-\frac{1}{5}} \fallingdotseq 1-\frac{1}{5}h \qquad\cdots\cdots\text{②}$$

が成り立つ．①，②より

$$\sqrt[5]{1000} \fallingdotseq 4\left\{1-\frac{1}{5}\left(\frac{24}{1000}\right)\right\}=4(1-0.0048)=3.9808$$

(答) $\sqrt[5]{1000} \fallingdotseq 3.98$

研究 次問の式

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{1}{2}x^2f''(c) \qquad\cdots\cdots(*)$$

(c は a と $a+x$ の間のある数)

を本問の $f(x)=(1+x)^{-\frac{1}{5}}$ に対して用いることが出来る．(*)を使って近似値 3.9808 の誤差を評価してみよ．

B. 365

関数 $f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつ範囲では

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{1}{2}x^2f''(c)$$

をみたす c が a と $a+x$ との間にあることを利用して，$\sin 61^\circ$ の近似値とその誤差のおよその限界とを求めよ．

解答　$f(x)=\sin x$ にとると

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x$$

であるから

$$\sin(a+x)=\sin a+x\cos a+\varepsilon$$

ただし，$\varepsilon=-\dfrac{1}{2}x^2\sin c$

と表せる．ここで

$$|\varepsilon|\leqq x^2/2 \qquad\cdots\cdots ①$$

であるから，$x\fallingdotseq 0$ のとき，近似式

$$\sin(a+x)\fallingdotseq\sin a+x\cos a \qquad\cdots\cdots ②$$

が成立し，その誤差 ε の限界は①で与えられる．

以上の議論では，x が弧度法で扱われていたから，

$\sin 61^\circ=\sin(60^\circ+1^\circ)$ を考えるときには，1° を弧度法の $\dfrac{\pi}{180}$ ラジアンに直して

$$\sin 61^\circ\fallingdotseq\sin 60^\circ+\frac{\pi}{180}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{360} \qquad\cdots\cdots ②'$$

その誤差の限界は

$$|\varepsilon|\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \qquad\cdots\cdots ①'$$

$\pi\fallingdotseq 3$ だから，①′ より誤差の限界はおよそ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{60}\right)^2\fallingdotseq\mathbf{0.00014}$$

である．よって，②′ の右辺は小数第4位まで計算すればよい．

そこで，$\sqrt{3}$，π の近似値としては

$$\sqrt{3}=1.7320,\quad \pi=3.14$$

を用い②′ に代入すると

$$\sin 61^\circ\fallingdotseq 0.8660+0.0087=\mathbf{0.8747}$$

ただし最後の桁の数には，1，2程度の相違はありうるが，小数第3位までの数字は完全に信用できる．

▶ ε［エプシロン］は，英語の e に対応するギリシア文字，誤差 error を表すのによく用いる．

▶ これが $\sin(a+x)$ の x についての1次の近似式である．

▶ 本来は，①′ より $|\varepsilon|\leqq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3.15}{180}\right)^2$ $=0.0001531\cdots$ <0.0001532 とすべきだが，10進小数による近似という実用的目的のためには，少しくらいラフでも計算が簡単な方がよい．

▶ もっと精密な計算によれば $\sin 61^\circ\fallingdotseq 0.8746197$

B. 366

$f(x)$ の第3次導関数が存在する範囲では，$h \fallingdotseq 0$ のとき

2次の近似式 $f(a+h) \fallingdotseq f(a)+hf'(a)+\dfrac{1}{2}h^2f''(a)$ ………①

が成り立つ．

さて，k の任意の実数値に対して，x の3次方程式

$$x^3-x^2+3x=k \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

は1実解をもつが，その実数解 x は k の関数である．

$k \fallingdotseq 0$ のとき，②の実根 x を表す k の2次の近似式を①を利用することによって作れ．

アプローチ ニュートン法を用いて逆関数を求めることに相当する問題である．

解答 ②が1実解をもつことは

$y=F(x)=x^3-x^2+3x$ と直線 $y=k$

との共有点を考察すると

$$F'(x)=3x^2-2x+3>0$$

より $y=F(x)$ が増加関数であって，k によらず1点で交わっていることからわかる．

いま，$x=f(k)$ とする．

①において $a=0$, $h=k$ とおくと，

$$x=f(k) \fallingdotseq f(0)+kf'(0)+\frac{k^2}{2}f''(0). \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

まず，$k=0$ のとき $x=0$ であるから

$$f(0)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

他方，②の両辺を k で微分すると

$$(3x^2-2x+3)f'(k)=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで $k=0$ とおくと $x=0$ だから $f'(0)=1/3$ ………⑥

さらに⑤の両辺を k で微分して

$$(6x-2)\{f'(k)\}^2+(3x^2-2x+3)f''(k)=0$$

◀ これをさらに k で微分すると $f'''(k)$ が求められて，$f'''(k)$ が存在することがわかる．

ここで $k=0$ とおくと $x=0$, $f'(0)=1/3$ であるから

$$-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+3f''(0)=0 \quad \therefore \quad f''(0)=\frac{2}{27} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

④，⑥，⑦を③に代入して

求める近似式は $\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}k+\dfrac{1}{27}k^2}$

B. 367

高さ x，底面の半径が r の直円柱で，体積が一定のままで高さがごくわずか変わって Δx だけ増すと，底面半径の減少はどれほどか．

また，高さが２％増すと，半径は約何％減少するか．

アプローチ 半径 r は高さ x を指定すると決まる．すなわち，r は x の関数である．

解答 体積を V とすれば

$$V=\pi x r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

この両辺を x で微分すると，V は一定であるから

$$0=\pi r^2+\pi x\cdot 2r\frac{dr}{dx} \qquad \therefore \quad \frac{dr}{dx}=-\frac{r}{2x} \quad \cdots\cdots ②$$

①で $V=$一定 のとき，$r=f(x)$ と書き，x の変化 Δx に対する r の変化を Δr とすると

$$\Delta r=f(x+\Delta x)-f(x)\fallingdotseq f'(x)\Delta x=\frac{dr}{dx}\cdot\Delta x \quad \cdots\cdots ③$$

▶ $\frac{\Delta r}{\Delta x}\fallingdotseq\frac{dr}{dx}$
一般に，$y=F(x)$ において
$\frac{\Delta y}{\Delta x}\fallingdotseq\frac{dy}{dx}$

②，③より

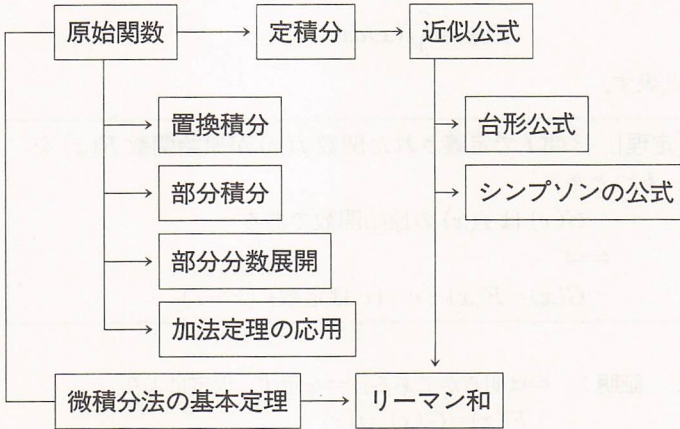
$$\boldsymbol{\Delta r\fallingdotseq-\frac{r}{2x}\Delta x}$$

また，これより

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{2}{100} \text{ のとき } \frac{\Delta r}{r}\fallingdotseq-\frac{1}{100}$$

▶ $\frac{\Delta r}{r}\fallingdotseq-\frac{\Delta x}{2x}$

したがって，

半径は約１％の減少となる

A 4.1 原始関数と定積分

I．原始関数

区間 I で定義された関数 $f(x)$，$F(x)$ が，

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \qquad (x\in I)$$

を満たすとき，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数（不定積分）といい，

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

と表す．

［定理］ 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が原始関数 $F(x)$ をもつとき，

$G(x)$ は $f(x)$ の原始関数である

$\Longleftrightarrow$

$G(x)=F(x)+c$　（c は定数）$(x\in I)$

1°　**証明：**　$\Leftarrow$は明らかである．$\Rightarrow$を示す．仮定により

$$F'(x)=G'(x)=f(x)$$

であるから，

$$H(x)=F(x)-G(x)$$

とおくと，$H'(x)=0$ となる．そこで任意に $a,\ b\in I$ $(a<b)$ をとると，平均値の定理により

$$\begin{cases}\dfrac{H(b)-H(a)}{b-a}=H'(k)\\ a<k<b\end{cases}$$

なる k が存在する．$H'(k)=0$ だから，

$$\frac{H(b)-H(a)}{b-a}=0 \qquad \therefore\quad H(b)=H(a)$$

これは $H(x)$ が定数であることを意味する．

2°　どのような関数 $f(x)$ が原始関数をもつかという問題は
☞ A 4.5

3°　定理中の定数 c を，積分定数という．

II．不定積分の例

微分の公式を原始関数(不定積分)の公式に読みかえる．

［公式］

$$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq -1)$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+c$$

$$\int e^x dx=e^x+c$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+c \qquad \int\sin x\,dx=-\cos x+c$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c \qquad \int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+c$$

1°　A 4.1 I の定義と定理は，区間で定義された関数だけを扱っている．$\frac{1}{x}$ や $\log|x|$ は，本当は，$x>0$ を定義域とする関数と，$x<0$ を定義域とする関数に分けて考えるべきである．すなわち，

$$\int\frac{1}{x}dx=\log x+c \qquad (x>0)$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log(-x)+c' \quad (x<0)$$

そして c と c' が等しい必要はない．

2°　$\frac{1}{\cos^2 x}$，$\frac{1}{\sin^2 x}$ の不定積分にも，上記と同様の問題がある．

III．次の定理は，原始関数の定義からすぐに得られる．

［定理］　区間 I で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ が原始関数をもつとき，$\alpha f(x)+\beta g(x)$ も原始関数をもち

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

Ⅳ. 定積分

ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対し，その原始関数 $F(x)$ が見つかるとき

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

を，$f(x)$ の a から b までの定積分という（ただし $a,\ b\in I$ とする）．定積分の値は，原始関数の選び方によらず定まる．

次のことは，定義から直ちに分かる．

[定理]

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

A 4.2 置換積分

Ⅰ. 不定積分の場合

いま，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．すなわち，

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

さらに，x が t の関数で $x=\varphi(t)$ なる関係があるとすると，$F(x)$ は t の関数 $F(\varphi(t))$ とみなせる．これを t で微分すると

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \cdots\cdots ①$$

すなわち，$F(x)$ は t の関数として $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数である．

これを定理の形で書くと，

> [定理]　$x=\varphi(t)$ という関係のもとで
> $$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

置換積分法

1°　上の定理の等式は，形式的に次のように書ける．

$$\int f(x)dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt$$

2°　置換積分は，合成関数の微分法の言い換えである．

3°　定理の仮定については ☞ A 4.2 V

II．定積分の場合

上の①にもどる．$F(\varphi(t))$ は $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数だから，$t=\alpha$ と $t=\beta$ の間の差をとって

$$F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

F が f の不定積分であることを思い出すと，次の定理を得る．

> [定理]
> $$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

置換積分法

1°　定理の仮定については ☞ A 4.2 V

III．簡単な例(1)

a，b を定数として，$\varphi(t)=at+b$ とおくと，$\varphi'(t)=a$ であるから

$$\int f(x)dx=\int f(at+b)adt$$

よって

> [定理]　$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，
> $$\int f(at+b)dt=\frac{1}{a}F(at+b)+c$$
> ただし $a\neq 0$ とし，c は積分定数である．

積分変数の線形変換

1°　特に $a=1$ のとき，

$$\int f(t+b)dt=F(t+b)+c$$

となる．

Ⅳ．簡単な例(2)

次の形の積分もしばしば現れる．

> ［定理］ $\displaystyle\int\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt=\log|\varphi(t)|+c$

1°　証明：$F(x)=\log|x|$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと，

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|=\log|\varphi(t)|$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int\frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)dt$$

Ⅴ．反　省

上記のⅠ，Ⅱに述べた定理には，次の3つの仮定が必要である．

(1)　φ が微分可能であること．

(2)　合成関数 $f(\varphi(t))$ を作れること．

（φ の値域が f の定義域に属する）

(3)　x の関数 $f(x)$ が原始関数をもつこと．

これらの仮定の下で

(4)　t の関数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ が原始関数をもつこと．

(5)　$f(x)$ の原始関数と $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数が，関係 $x=\varphi(t)$ の下で一致すること

を示したのである．

1°　仮定(3)と帰結(4)を逆にして，仮定(1)，(2)，(4)の下で(3)，(5)を証明することもできる．その一般的な証明は表現がわずらわしくなるので，

φ は単調増加（$\varphi'(t)>0$）である

ことを仮定して証明する．

（単調減少の場合も同様である）

$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数を $G(t)$ とする．

$$\frac{d}{dt}G(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

ここで単調増加な関数 $x=\varphi(t)$ は逆関数 $t=\varphi^{-1}(x)$ をもち

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

が成立する．そこで $G(\varphi^{-1}(x))$ を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}G(\varphi^{-1}(x))&=\frac{dG}{dt}\frac{dt}{dx}\\&=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=f(\varphi(t))\\&=f(x)\end{aligned}$$

となり，$G(\varphi^{-1}(x))$ は $f(x)$ の原始関数であることが分かる．

A 4.3　部分積分

u，v を x の関数とするとき，積の微分の公式により

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\therefore\quad u'v=(uv)'-uv'$$

この等式の各項を積分することによって，つぎの定理が得られる．

部分積分法

［定理］ $\displaystyle\int u'vdx=uv-\int uv'dx$

$$\int_a^b u'vdx=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b uv'dx$$

1°　部分積分法は，積の微分法の言い換えである．

2°　正確には，「u，v が微分可能であり，uv' が原始関数をもつこと」を仮定している．

3°　例　$\displaystyle\int x\cos xdx$ の計算．

$u'=\cos x$，$v=x$ と見て定理を用いる．$u=\sin x$ としてよく，$v'=1$ である．

よって，

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

例　$\int_1^2 \log x dx$ の計算．

$u'=1$，$v=\log x$ と見なすと，$u=x$，$v'=\dfrac{1}{x}$ だから，

$$\int_1^2 \log x dx = \Big[x\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^2$$
$$= 2\log 2 - 1$$

A 4.4　積分の補助的な技法

I．部分分数展開

$x \neq \pm 2$ に対し，

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

よって，

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}(\log|x-2| - \log|x+2|) + C$$

一般に多項式 $f(x)$ が，

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots(x-\gamma)$$

（α，β，……，γ はすべて異なる実数の定数）

のように因数分解されるとき，任意の多項式 $g(x)$ に対し

$$\frac{g(x)}{f(x)} = (\text{多項式}) + \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \cdots\cdots + \frac{Z}{x-\gamma}$$

が成立するように，定数 A，B，……，Z を定めることができる．これを部分分数展開という．

1°　α，β，……，γ の中に一致するものがあるときは，注意を要する．例えば

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

なる A，B は存在しない．この場合は

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}$$

という分解を用いなければならないのである．

II．三角関数の公式

倍角公式

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

積を和に変える公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

を用いると，

$$\int\cos^2 x dx=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$$

（C は積分定数）

$$\int\cos 3x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

（C は積分定数）

III．その他

言うまでもないことだが，恒等式はすべて使うことが許される．上記のＩ，IIは，その例であった．

また漸化式の形の恒等式

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+g_n(x)\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

があるとき，

$$f_0(x)$$

$$g_k(x)\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が積分できるなら，

$$f_k(x)\qquad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

も帰納的に積分できる．☞ B.407 研究，B.420

A 4.5　微積分法の基本定理と定積分の近似和

I．微積分法の基本定理

次の定理は，原始関数と定積分の定義から直ちに得られる．

> **微積分法の基本定理**
>
> [定理]　区間 I で定義された関数 $f(x)$ が原始関数をもつとき，次式が成立する．
>
> $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\quad (x,\ a\in I)$$

1°　$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$ は $f(x)$ の原始関数のひとつである．a の値を変えると別の原始関数が得られるが，それらの差は

$$\int_a^x f(t)\,dt-\int_b^x f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

であり，x によらない定数（積分定数）である．

次に，簡単なわりに大きな名前をもつこの定理の意義を考えよう．

II．定積分の近似和

$f(x)$ を閉区間 $[a,\ b]$（すなわち，$a\leqq x\leqq b$）において連続な関数とするとき，区間 $[a,\ b]$ の有限個の小区間への分割 $\varDelta$ に応ずる定積分の近似和 $S_\varDelta$ をつぎのように定める．

$\varDelta$ の分点を $x_0\,(=a)<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n\,(=b)$ とし，小区間の幅のうち最大のものを $|\varDelta|$ で表す．

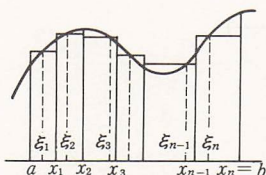
$$|\varDelta|=\max(x_{k+1}-x_k)$$

一方，小区間 $[x_k,\ x_{k+1}]$ から任意の代表点をとり，ξ_k とおく．

$$\xi_k\in[x_k,\ x_{k+1}],\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

このような分割と代表点のとり方に対応する近似和は

$$S_\varDelta=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\quad\cdots\cdots①$$

である．

つぎの定理は，S_Δ が文字どおり $\int_a^b f(x)dx$ の近似和であることを主張している．S_Δ をリーマン和とも言う．

近似和の極限

[定理]　閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対しては，区間 $[a,\ b]$ の分割 Δ が $|\Delta|\to 0$ となるように細かくされてゆくならば，代表点のえらび方のいかんによらず，近似和 S_Δ は一定の極限値に近づき，

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=\int_a^b f(x)dx \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する．

1°　この定理の主張は2つある．

(1)　$|\Delta|\to 0$ の極限で，S_Δ が一定の値 I に近づくこと．

(2)　その値 I が定積分 $\int_a^b f(x)dx$ に等しいこと．

ここで(2)は，I を b の関数と見て，

$$\begin{cases} b=a \text{ のとき } I=0 \\ \dfrac{d}{db}I=f(b) \end{cases} \qquad \text{(微積分法の基本定理)}$$

が成り立つことと同値である．

2°　例えば $f(x)=x^2$ とし，Δ を閉区間 $[0,\ 1]$ の等分割

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_N=1$$

$$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{N},\ \ \xi_k=x_k$$

とすると，この定理が成立していることを実際に確かめることができる．☞「大学への数学IIニューアプローチ」C. 16，p. 293

しかし，一般の連続関数に対する証明は，深い知識を要する．

3°　理論的にはこの定理は，「すべての連続関数は，原始関数をもつこと」を主張している．

III．定積分とは何か

「大学への数学IIニューアプローチ」の積分法のところでも述べたように，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を近似和，あるいは，リーマン和(リーマン，G.F.B.Riemann，1826〜1866)の極限として定義することができる(実はそれが正統的なのである)．

微分の逆演算としてではなく，このように構成的に定義された定積分が，微積分法の基本定理

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b)$$

を満たすことには，格別の意義がある．というのは，微分とは独立に定義された積分が，結果的に微分の逆演算であるということが分ったからである．

A 4.6 定積分の近似公式

I．数値積分

$I=\int_a^b f(x)\,dx$ の値を数値的に求めるときに，$f(x)$ の原始関数が簡単に見つかれば結果は容易に得られる．しかし，一般の場合については原始関数が求められない（簡単な式で表されない）ことが多い．そのような場合に I の近似値を求める種々の公式（いわゆる数値積分の公式）が工夫されている．

A 4.5 IIのリーマン和 S_Δ は，その最も素朴な例である．

以下において，区間 $a \leqq x \leqq b$ の n 等分点

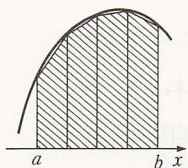
$$x_0\,(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1},\ x_n\,(=b)$$

における $f(x)$ の値 y_0，y_1，……，y_n がわかっているとする．

また，分点間の距離を h とおく，すなわち，$h=\dfrac{b-a}{n}$．

x	x_0	x_1	x_2	…………	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…………	y_{n-1}	y_n

$$\left(\begin{aligned} x_k &= a+kh \\ y_k &= f(x_k) \end{aligned}\right)$$

II．台形公式

> I の近似値として
>
> $$T_n = h\frac{y_0+y_n}{2} + h(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1})$$
>
> をとる．

1°　I の近似値として T_n を用いることは，各小区間 $[x_k,\ x_{k+1}]$ において $f(x)$ のグラフを 2 点 $(x_k,\ y_k)$，$(x_{k+1},\ y_{k+1})$ を結ぶ線分でおきかえることに相当している．

2°　$a \leqq x \leqq b$ において $|f''(x)| \leqq M_2$（ただし，M_2 は定数）であれば

$$|I-T_n| \leqq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

が成り立つ．これは台形公式の精度を表すものである．もともと，近似式には精度の評価が重要なのであるが，簡単な台形公式の場合でさえ，上の評価を導くことは相当めんどうな仕事になり，高校の程度をこえてしまう．

Ⅲ．シンプソンの公式

I の近似値として

$$S_n=\frac{h}{3}\{(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})\}$$ をとる．

ただし，n は偶数とする．

1°　この近似式は，区間 $[x_{2k-2},\ x_{2k}]$ において $f(x)$ のグラフを

3 点 $(x_{2k-2},\ y_{2k-2})$，$(x_{2k-1},\ y_{2k-1})$，$(x_{2k},\ y_{2k})$ を通り軸が y 軸に平行な放物線 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

でおきかえることに相当している．実際，この放物線の下の面積 M_k は

$$M_k=\frac{h}{3}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$$

となる．M_k を $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n/2$ について加えたものが上の S_n に他ならない．

2°　$a \leqq x \leqq b$ において $|f^{(4)}(x)| \leqq M_4$（ただし，M_4 は定数）であれば

$$|I-S_n| \leqq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$$

が知られている．これはシンプソンの公式の精度を表すものである．

3°　コンピュータを利用した，この公式の実用性については，

☞ A.10

――A 4　おわり――

B. 401

つぎの各積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{(x-1)(2x-3)}{x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3dx$

まず分子を展開 ▶
割り算を実行 ▶
まず展開 ▶
x^α の形に ▶
積分した結果は逆に微分して元に戻るかどうか確めると安心 ▶

解答 (1) $\displaystyle\int\frac{(x-1)(2x-3)}{x}dx=\int\frac{2x^2-5x+3}{x}dx$

$\displaystyle=\int\left(2x-5+\frac{3}{x}\right)dx$

$=\boldsymbol{x^2-5x+3\log|x|+C}$　（C は積分定数）

(2) $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3dx=\int_1^2\left(x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

$\displaystyle=\int_1^2\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(\frac{8}{5}-4+6+1\right)\sqrt{2}-\left(\frac{2}{5}-2+6+2\right)$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{23\sqrt{2}-32}{5}}$

B. 402

つぎの各積分を求めよ．ただし，m は 0 でない定数とする．

(1) $\displaystyle\int\cos 3x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi\sin mx\,dx$

解答 (1) $\displaystyle\int\cos 3x\,dx=\int\frac{1}{3}(\sin 3x)'dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\sin 3x+C$　（C は積分定数）

(2) $\displaystyle\int_0^\pi\sin mx\,dx=\int_0^\pi-\frac{1}{m}(\cos mx)'dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{m}\cos mx\right]_0^\pi=-\frac{1}{m}(\cos m\pi-\cos 0)$

$\displaystyle=\boldsymbol{-\frac{1}{m}\{(-1)^m-1\}}$

B. 403

つぎの各積分を求めよ．

(1) $\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\int \sin^3 2x\,dx$

(3) $\int_0^\pi \sin 2x \cos 3x\,dx$

アプローチ $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ や $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ の公式から $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}(-\cos x)^3 + C$ などの珍公式を「発明」してはなりません．それぞれについて，三角関数のうまい公式を用いると，原始関数を見つけられます．

解答 (1) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$= \boldsymbol{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C}$　（C は積分定数）

◀ 倍角の公式 $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

(2) $\int \sin^3 2x\,dx = \int \frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4}\,dx$

$= \boldsymbol{-\frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + C}$　（C は積分定数）

◀ 三倍角の公式 $\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$

(3) $\int_0^\pi \sin 2x \cos 3x\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5} - 1\right) - \left(-\frac{1}{5} + 1\right)\right\}$

$= \boldsymbol{-\frac{4}{5}}$

◀ 和を積に変える公式 $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

研究 1°　一般に，(1)，(2)と同様にして

$$\int \sin^2 ax\,dx,\ \int \sin^3 ax\,dx,\ \int \sin^4 ax\,dx \qquad (a \text{ は } 0 \text{ でない実定数})$$

なども計算できる．ただし，累乗の指数が大きくなったときには，他にもっと有効な計算手段もある． ☞ B. 420

2°　(3)と同様にして

$$\int \sin mx \sin nx\,dx,\ \int \cos mx \cos nx\,dx,\ \int \sin mx \cos nx\,dx$$

などが計算できる．

B.404

倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を利用し，$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

解答　まず，$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

積分区間 $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$ においては $\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\geqq 0 & \left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi\right)\\ \cos\frac{x}{2}\leqq 0 & \left(\pi\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi\right)\end{cases}$

となることから，

$\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$（定積分の加法性）▶

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx+\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx$$

絶対値をはずす．▶

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx-\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$$

$$=\left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$$

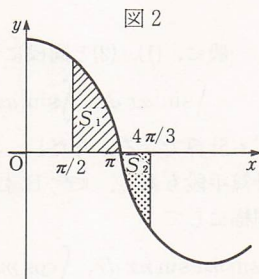
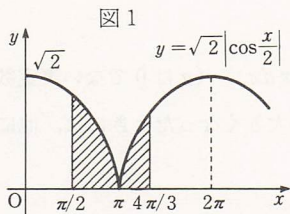
$$=\mathbf{4\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}$$

注意　誤って $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ とすると $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx$

$=\left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4}{3}\pi}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{6}-2$ となる．これでは，図1の斜線部分の面積を求めるかわりに，図2の2つの面積 S_1，S_2 の差 S_1-S_2 を求めたことになる．

定積分において被積分関数の絶対値をはずすときには，このように符号に気を配らないといけない．(不定積分の場合には，符号を気にしようがないので，周囲の状況により判断するしかない．)

図1

図2

B. 405

つぎの各積分を[　]内の置換を利用して求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 x(3-x)^5 dx$　$[3-x=t]$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}dx$　$[x^2=t]$

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$　$[\sin x=t]$

解答　(1)　$3-x=t$ とおけば $x=3-t$，$dx=-dt$ で，積分区間の対応は右のようになる．

x	$0 \nearrow 3$
t	$3 \searrow 0$

$$\therefore\ \int_0^3 x(3-x)^5 dx=\int_3^0(3-t)t^5(-dt)=\int_0^3 t^5(3-t)dt$$

$$=\int_0^3(3t^5-t^6)dt=\left[\frac{t^6}{2}-\frac{t^7}{7}\right]_0^3=\boldsymbol{\frac{729}{14}}$$

(2)　$x^2=t$ とおけば $2x\,dx=dt$ だから，$e^{-x^2}=e^{-t}$，$x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$ で，積分区間は右のようになる．

x	$0 \nearrow 2$
t	$0 \nearrow 4$

◀ $x=\varphi(t)=\sqrt{t}$ と置換して，$\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}dx=\int_0^4\sqrt{t}\,e^{-t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ になると考えることもできるが，解答の置換の方が楽

$$\therefore\ \int_0^2 xe^{-x^2}dx=\int_0^2 e^{-x^2}\cdot xdx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^4$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)}$$

(3)　$\sin x=t$ とおけば，$\cos x\,dx=dt$

$$\therefore\ \int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=2\sqrt{1+t}+C$$

$$=\boldsymbol{2\sqrt{1+\sin x}+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

研究　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を，$x=\varphi(t)$ と置換して $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (ただし，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$) と求める場合，$\varphi'(t)$ は，積分区間で連続でなければならないはずであった．
(☞ A 4.2)

しかるに，上の(2)で実行した置換積分で，$\varphi(t)=\sqrt{t}$ と考えると $\varphi'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ は積分区間 $0\leqq t\leqq 4$ の端点 $t=0$ において連続でない．このような場合に置換積分の公式が妥当するか否か，議論の余地があるところだが，このような微妙なところを気にとめずに進むのが，高校微積分の多数派である．気になる人は置換積分の定義に立ち帰って考えてみよ．(☞ A 4.2)

B. 406

つぎの各積分を求めよ．

(1) $\int x(x^2-1)^4dx$　　(2) $\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx$

(3) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$　　(4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

アプローチ　$\{(f(x))^{n+1}\}'=(n+1)(f(x))^n\cdot f'(x)$ より

$n \neq -1$ のとき $\int (f(x))^n f'(x)dx=\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}+C$

また，$n=-1$ ならば $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

これらは置換積分の特別な場合です．これをうまく利用するだけで，原始関数が見つかるものがたくさんあります．

解答　(1) $\int x(x^2-1)^4dx=\frac{1}{2}\int (x^2-1)^4\cdot 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int (x^2-1)^4\cdot (x^2-1)'dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{10}(x^2-1)^5+C}$　(C は積分定数)

(2) $\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}dx=\int \sqrt{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx=\int (\log x)^{\frac{1}{2}}\cdot(\log x)'dx$

$=\boldsymbol{\frac{2}{3}(\log x)^{\frac{3}{2}}+C}$　(C は積分定数)

(3) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=\int \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}dx$

$=\boldsymbol{-\log|e^{-x}+1|+C}$　(C は積分定数)

(4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \tan^2 x\cdot(\tan x)'dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\tan^3 x+C}$　(C は積分定数)

B.407

つぎの各積分を求めよ.

(1) $\int \tan x\,dx$　　(2) $\int \tan^2 x\,dx$　　(3) $\tan^3 x\,dx$

アプローチ 簡単そうに見えるが，意外に手強い．$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくことにより，

(1)は $\displaystyle\int\frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)}dt$，(2)は $\displaystyle\int\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2\frac{2}{1+t^2}dt$，(3)は $\displaystyle\int\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^3\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$

という，有理関数の積分に帰着することもできるが，この後の計算はかなり tough です．うまい変形に気づくと，アッサリ解決します．

解答 (1) $\displaystyle\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$

$$=\boldsymbol{-\log|\cos x|+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

◀ $\cos x=u$ と置換して積分したことに相当する.

(2) $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\boldsymbol{\tan x-x+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

◀ $\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

◀ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3) $\displaystyle\int\tan^3 x\,dx=\int\tan x\cdot\tan^2 x\,dx=\int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int\tan x\cdot(\tan x)'dx-\int\tan x dx$$

(1)の結果を利用して

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

◀ $\displaystyle\int\tan x(\tan x)'dx=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$ は $\tan x=u$ と置いて置換積分したことに相当する.

研究 $I_n=\int\tan^n x\,dx$ とおけば，$n\geqq 3$ のときは，(3)と同様にして

$$I_n=\int\tan^{n-2}x\cdot\tan^2 x\,dx=\int\tan^{n-2}x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int\tan^{n-2}x\,dx$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$$

が成り立つ．これを利用して，$I_n\to I_{n-2}\to I_{n-4}\to\cdots$ と添字をおとしてゆけば，I_n の計算は最終的には，I_2 か I_1 のそれに帰着される．一方，I_1 と I_2 は，上のように定まるので，すべての自然数 n について，I_n は計算可能である．

B.408

つぎの各積分を求めよ．

(1)　$I=\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2}dx$　　(2)　$J=\displaystyle\int\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)(x-1)}dx$

アプローチ　分母が複雑な分数関数の積分は，まず部分分数に展開するのが最初の仕事です．

解答　(1)　分母の形から，部分分数展開はつぎの形になる．

☞ A 4.4 I ▶

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\quad\cdots\cdots①$$

①を通分して，分子を比較すると，次式を得る．

$$2x+1=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)\quad\cdots\cdots②$$

②において

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 \text{　とおき} & 3=9A \\ x=-2 \text{　とおき} & -3=-3C \\ x^2 \text{ の係数から} & 0=A+B \end{array}\right\}\quad \therefore\quad A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=1$$

$$\therefore\quad I=\int\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{3}\log|x+2|-\frac{1}{x+2}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2)　$\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x-1}$

とおき，通分して両辺の分子を比較すると

$$x^2-2x-1=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$
$$=(A+C)x^2-(A-B)x-(B-C)$$

これが恒等式であるための条件

$$\left.\begin{array}{l} A\quad\ \ +C=1 \\ A-B\quad\ \ =2 \\ \quad\ \ B-C=1 \end{array}\right\}\text{ を解いて，}A=2,\ B=0,\ C=-1$$

$\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+1}dx$ を計算するには，$x=\tan\theta$ と置換してもよい． ▶

$$\therefore\quad J=\int\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}-\frac{1}{x-1}\right\}dx$$

$$=\log(x^2+1)-\log|x-1|+C$$

$$=\log\frac{x^2+1}{|x-1|}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

B. 409

つぎの各積分を求めよ．

(1)　$I=\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^2}dx$　　(2)　$J=\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$　　(3)　$K=\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$

アプローチ 置換積分には，しばしば有効な，置換の定石があります．なかでも分母が $(ax+b)^n$ の分数の積分では $ax+b=t\ \left(x=\frac{1}{a}(t-b)\right)$ とおく，無理式 $\sqrt{ax+b}$ を含む積分では，$\sqrt{ax+b}=t\ \left(x=\frac{1}{a}(t^2-b)\right)$ とおき，2次式 x^2+a^2 を含む積分では，$x=a\tan\theta$ とおくと，……などは，特に有名なものです．

解答　(1)　$2x+1=t$ とおくと，$x=\frac{1}{2}(t-1)$，$dx=\frac{1}{2}dt$ で，

積分区間の対応は右のようになる．

x	$0 \nearrow 1$
t	$1 \nearrow 3$

$$\therefore\quad I=\int_1^3 \frac{1}{2}(t-1)\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int_1^3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\log|t|+\frac{1}{t}\right]_1^3=\boldsymbol{\frac{1}{4}\log 3-\frac{1}{6}}$$

(2)　$\sqrt{2x+1}=t$ とおくと，$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$dx=t\,dt$

$$\therefore\quad J=\int\frac{1}{2}\cdot(t^2-1)\cdot\frac{1}{t}\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int(t^2-1)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C=\frac{1}{6}(t^2-3)t+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x-1)\sqrt{2x+1}+C}\quad (C\text{ は積分定数})$$

(3)　$x=2\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x^2+4=4(\tan^2\theta+1)=\frac{4}{\cos^2\theta}$$

$$dx=2\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

積分区間は右のように対応する．

x	$0 \nearrow 2$
θ	$0 \nearrow \frac{\pi}{4}$

$$\therefore\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2\theta}{4}\cdot 2\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

B.410

つぎの各定積分を求めよ．

(1)　$I=\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$　　(2)　$J=\int_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

アプローチ　無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ を含む積分では，$x=a\sin\theta$ と置換するのが定石です．

解答　（1）　$x=2\sin\theta$ とおき，

θ の変域を　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$

x	$0\nearrow 1$
θ	$0\nearrow\dfrac{\pi}{6}$

にとることができる．このとき，

変域内で $\cos\theta\geqq0$ ▶

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2|\cos\theta|=2\cos\theta,\quad dx=2\cos\theta\,d\theta$$

$2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$ ▶

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sin^2\theta\cdot2\cos\theta\cdot2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$\sin^2 2\theta=\dfrac{1-\cos4\theta}{2}$ ▶

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos4\theta)\,d\theta=2\left[\theta-\frac{\sin4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

この変形がカギ ▶

（2）　$\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}$ であるから，

$x-2=2\sin\theta$，すなわち，

$x=2(1+\sin\theta)$　　とおき，

θ の変域を　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$

x	$1\nearrow 3$
θ	$-\dfrac{\pi}{6}\nearrow\dfrac{\pi}{6}$

にとることができる．このとき，

変域内で $\cos\theta\geqq0$ ▶

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta}}=\frac{1}{2|\cos\theta|}=\frac{1}{2\cos\theta},\quad dx=2\cos\theta\,d\theta$$

$$\therefore\quad J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot2\cos\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

研究　置換積分の根拠（☞ A 4.2）を考えればわかるように，積分変数 x と θ の対応が上のように，単調である必要は必ずしもない．たとえば，(1)の場合

$\theta=5\pi/6$ のときも，$x=2\sin\theta=1$

なることから　　$I=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}4\sin^2\theta\cdot2|\cos\theta|\cdot2\cos\theta\,d\theta=\cdots\cdots$

としても良い．ただしこの場合は被積分関数の絶対値記号をはずすのに，計算がやや複雑化する．つまり

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 2\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}4\sin^2 2\theta\,d\theta$$

となる．このような，いたずらな煩雑さを回避するため，$x=2\sin\theta$ と置換する場合は，θ の変域を，初めから，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の中で考えるのが好都合である．

B. 411

つぎの各定積分を求めよ．

(1)　$I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$　　(2)　$J=\displaystyle\int_1^4\frac{x+1}{x^2-2x+4}dx$

アプローチ　$(x^2+a^2)^n$ を含む積分では，$x=a\tan\theta$ とおくのが定石でした．

解答　(1)　$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=|\cos\theta|=\cos\theta,\ dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

◀ $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ では $\cos\theta>0$

$$\therefore\quad I=\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2+1})^5}=\int\cos^3\theta\,d\theta=\int(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int\{\cos\theta-\sin^2\theta(\sin\theta)'\}d\theta=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+C$$

ここで，$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから，

◀ θ を x に戻す．

$$\boldsymbol{I=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+C}\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2)　分母$=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ となることから，

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ すなわち $x=1+\sqrt{3}\tan\theta$ とおけば，

$$\frac{1}{x^2-2x+4}=\frac{\cos^2\theta}{3},\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$1\nearrow 4$
θ	$0\nearrow\dfrac{\pi}{3}$

で，積分区間を右のようにとることができる．

$$\therefore\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2+\sqrt{3}\tan\theta)\cdot\frac{\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\tan\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\theta-\log|\cos\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+\log 2}$$

研究　(2)において，$x=1+\sqrt{3}\tan\theta$ とおいたとき，$\theta=4\pi/3$ のときも $x=4$ となるからといって，積分区間を 0 から $4\pi/3$ までとするわけにはいきません．$\varphi(\theta)=1+\sqrt{3}\tan\theta$ が，積分区間 $0\leqq\theta\leqq 4\pi/3$ で，連続ではなくなってしまうからです．

被積分関数が連続になる範囲なら，たとえば(1)においては，$\pi/2<\theta<3\pi/2$ で考えてもかまいません．その場合は，$|\cos\theta|=-\cos\theta$ となりますが，計算すればその最終結果は上で求めたものと一致するはずです．計算してみて下さい．

B.412

(イ) $x \neq \pi \times$(奇数) のとき，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ．

(ロ) 上記の置換を利用して，つぎの各積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

解答 **(イ)** 倍角公式を用いると，

▶ $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ を t で微分して，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{1+t^2}\ ■$$

▶ $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(ロ) (1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$

$$=\log|t|-\log(1+t^2)+C'=\log\left|\frac{t}{1+t^2}\right|+C'$$

$$=\boldsymbol{\log|\sin x|+C}\quad (C=C'-\log 2 \text{ は積分定数})$$

▶ $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\log|\sin x|+C$ という公式が得られた．$\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$ と考えてもよい．

(2) 積分区間は右のようにする．

x	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \nearrow 1$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{t+1}=\Big[\log|t+1|\Big]_0^1=\boldsymbol{\log 2}$$

研究 (イ)の置換を利用すれば，“$\sin x$, $\cos x$ の有理関数”の積分は，“t の有理関数”の積分に帰着できます．ただし，必ずしもこの方法が得策とは限りません．(☞ B.407)

B.413

$I=\int\frac{dx}{\sin x}$ をつぎの各方法で求めよ．

(1)　$\tan\frac{x}{2}=t$ とおいて置換積分を実行する．

(2)　分子・分母に $\sin x$ をかけ，$\cos x=u$ とおいて置換積分を実行する．

解答　(1)　$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ であるから

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C$$

$$=\boldsymbol{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C}\qquad (C\text{ は積分定数})$$

(2)　$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$ であるから

$$I=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{(-1)du}{1-u^2}$$

$$=\int\frac{du}{(u-1)(u+1)}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\{\log|u-1|-\log|u+1|\}+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C}$$

(C は積分定数)

研究　(1)，(2)の結果は一見すると矛盾するようですが，

$$\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|=\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|=\left|\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}\right|=\tan^2\frac{x}{2}$$

となることを考慮すれば，完全に一致していることがわかります．不定積分においては，積分定数の不定性のために，もっと逆説的な現象もおこります．☞ B.414

B. 414

$I=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ をつぎの各方法で求めよ．

(1)　$\cos x=u$ とおいて置換積分を実行する．

(2)　$\tan x=t$ とおいて置換積分を実行する．

解答　(1)　$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x dx=du$

$$\therefore\quad I=\int\frac{-du}{u^3}=\frac{1}{2u^2}+C_1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2\cos^2 x}+C_1}\quad (C_1\text{ は積分定数})$$

(2)　$\tan x=t$ とおくと $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$

$$\therefore\quad I=\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\tan^2 x+C_2}\quad (C_2\text{ は積分定数})$$

研究　(1)，(2)を見ると同じ関数の不定積分 I が置換の仕方によって異なる結果を生んだように見えます $\left(\frac{1}{2\cos^2 x}\neq\frac{1}{2}\tan^2 x\right)$ が，積分定数を考慮すると，両者は全体としては一致しています．つまり，$\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$ であることから，C_1 と C_2 を $C_2=C_1+\frac{1}{2}$ と対応させればよいのです．このように不定積分においては，積分定数の不定性によって，見かけ上異なる結果が現れることがあります．

なお，定積分においては，当然のことながら結果は完全に一致します．たとえば

$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ において，

$\cos x=u$ とおくと，$I_0=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-1}{u^3}du=\left[\frac{1}{2u^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}$

$\tan x=t$ とおくと，$I_0=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

となります．

B. 415

$\varphi(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおく．$x=\varphi(t)$ と置換することにより，

積分 $J=\displaystyle\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を計算せよ．

解答　$x=\varphi(t)$ とおくと，

$$x^2+1=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2+1=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2+1}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\frac{dx}{dt}\qquad \therefore\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt$$

あとは，積分区間の対応を調べればよい．

まず，$x=0$ は $t=0$ に対応する．

また，$x=X$ に対応する t の値を $t=T$ とおくと，

$$X=\frac{e^T-e^{-T}}{2} \text{ より } (e^T)^2-2X(e^T)-1=0$$

$e^T>0$ であることを考え，$e^T=X+\sqrt{X^2+1}$

◀ e^T の2次方程式のもうひとつの解は負になる．

$$\therefore\quad T=\log(X+\sqrt{X^2+1})$$

以上より，$x=\varphi(t)$ のおきかえで，

$$J=\int_0^X\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_0^T dt=T=\mathbf{log}\,(\boldsymbol{X}+\sqrt{\boldsymbol{X}^2+\mathbf{1}}\,)$$

研究　1°　以上より $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$ が得られました．

2°　$\sqrt{x^2+A}$（A は定数）を含む積分では，$x+\sqrt{x^2+A}=u$ と置換するのもよいでしょう．

3°　$\varphi(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ は，通常 $\sinh x$ と表される関数で，双曲線正弦 (hyperbolic sine) と呼ばれています．同様にして

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

はそれぞれ，双曲線余弦，双曲線正接とよばれ，これらを総称して双曲線三角関数といいます．それは，三角関数とよく似たつぎのような関係式を満たすからです．

$$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1,\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,\quad \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\quad \frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{(\cosh x)^2} \text{ など}$$

B. 416

部分積分法を用いてつぎの各積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$　　(2) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx$

アプローチ (1)では x を微分する側に，e^{-x} を積分する側に選びます．(2)では，被積分関数を $\log x$ と 1 の積と考え，$\log x$ を微分する側，1 を積分する側と考えます．(3)でも，被積分関数を 1 と $(\log x)^2$ の積と考えるところがミソです．

e^{-x} を積分すると $-e^{-x}$ ▶

解答 (1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx = x\cdot(-e^{-x}) - \int (x)'\cdot(-e^{-x})dx$

$$= \boldsymbol{-xe^{-x}-e^{-x}+C} \quad (C \text{ は積分定数})$$

1 を積分すると x ▶

(2) $\displaystyle\int \log x dx = \int (x)'\log x dx = x\cdot\log x - \int x(\log x)'dx$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= \boldsymbol{x\log x - x + C} \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx = \int_1^e 1\cdot(\log x)^2 dx$

$\dfrac{d}{dx}(\log x)^2 = 2\log x \times \dfrac{1}{x}$ ▶

$$= \Big[x\cdot(\log x)^2\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= e - 2\int_1^e \log x\,dx$$

(2)の結果を利用して

$$= e - 2\Big[x\log x - x\Big]_1^e = \boldsymbol{e-2}$$

研究 部分積分の公式は，積の微分公式

$$\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \therefore \quad f'(x)g(x) = \{f(x)\cdot g(x)\}' - f(x)g'(x)$$

の両辺を積分した $\displaystyle\int_a^X f'(x)g(x)dx = \int_a^X \{f(x)\cdot g(x)\}'dx - \int_a^X f(x)g'(x)dx$

$$\therefore \int_a^X f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^X - \int_a^X f(x)g'(x)dx \quad \cdots\cdots(*)$$

にほかなりません．ところで，与えられた $f'(x)$ に対して $f(x)$ は一意には定まりませんが，どの $f(x)$ に対しても $(*)$ は成り立ちます．たとえば(2)で $1=x'$ とするかわりに，$1=(x+1)'$ と考えて $\displaystyle\int \log x\,dx = (x+1)\log x - \int (x+1)\cdot\frac{1}{x}dx$ と計算することもできます．

B. 417

つぎの各積分を求めよ.

(1) $I=\int x^2\sin x dx$　　(2) $J=\int_1^e x(\log x)^2 dx$

アプローチ $\int x^n f(x)dx$, $\int \{f(x)\}^n dx$ というタイプの積分では，部分積分法が有効なものが多いので，覚えておくとよいでしょう.

解答 (1) 部分積分法により

$$I=\int x^2(-\cos x)'dx=x^2\cdot(-\cos x)-\int (x^2)'\cdot(-\cos x)dx$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 部分積分により，被積分関数内の x^2 が x になった!

ここで，①の右辺の第2項を再び部分積分すれば，

$$\int x\cos x=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C_1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入して

$$\boldsymbol{I=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C}$$

($C=2C_1$ は積分定数)

(2) 部分積分法により

$$J=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2dx=\left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\{(\log x)^2\}'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\log x\,dx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

◀ 部分積分により $\int x(\log x)^2dx$ が $\int x\log x\,dx$ で表せた!

①の右辺の第2項に，再び部分積分を用いると

$$\int_1^e x\log x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\log x dx=\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入して　$\boldsymbol{J=\dfrac{e^2-1}{4}}$

研究 部分積分をするときには，被積分関数の2つの因子のどちらを積分する方に，どちらを微分する方に選ぶかが大切なポイントですが，そのときの原則は

(i) $\sin x$, $\cos x$, e^x は“積分”する側(積分しても複雑にならないから)

(ii) $\log x$ は“微分”する側(微分すると log がなくなるから)です.

B. 418

つぎの各積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)dx$

アプローチ 置換積分と部分積分の両方を合わせて用いることによって計算できる，積分の例です．

解答 (1) $\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$，$dx=2t\,dt$ で，積分区間の対応は，右のようになる．

x	$0 \nearrow 4$
t	$0 \nearrow 2$

$$\therefore\quad \int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^2 e^t\cdot 2t\,dt=2\int_0^2 te^t dt$$

ここで部分積分すると

▶ $\displaystyle\int t^n e^t dt=\int t^n(e^t)'dt$ と考えて部分積分

$$\int_0^2 te^t dt=\int_0^2 t\cdot(e^t)'dt=\Big[te^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t dt$$

$$=2e^2-\Big[e^t\Big]_0^2=e^2+1$$

よって $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=2(e^2+1)$

(2) 部分積分すると

▶ $\displaystyle\int\log f(x)dx=\int(x)'\log f(x)dx$ と考えて部分積分

$$\int_0^1\log(x^2+1)dx=\int_0^1(x)'\cdot\log(x^2+1)dx$$

$$=\Big[x\log(x^2+1)\Big]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\log 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\log 2-2+2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\quad\cdots\cdots①$$

▶ $\dfrac{1}{x^2+1}$ を含むときは，$x=\tan\theta$ とおく．☞ B. 409

第3項の積分で，$x=\tan\theta$ とおけば，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\dfrac{1}{x^2+1}=\cos^2\theta$ で，積分区間は右のように対応する．

x	$0 \nearrow 1$
θ	$0 \nearrow \frac{\pi}{4}$

$$\therefore\quad \int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より $\displaystyle\int_0^1\log(x^2+1)dx=\log 2-2+\frac{\pi}{2}$

B. 419

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$ に対して，$I(p,\ q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$ とおく．

(1)　$I(q,\ p)=I(p,\ q)$ であることを示せ．

(2)　$I(p,\ q)=\dfrac{q}{p+1}I(p+1,\ q-1)$ を示せ．

(3)　自然数 m，n に対し，$I(m,\ n)$ を求めよ．

解答　(1)　$I(p,\ q)$ において，$x=1-t$ と置換すると

$$\begin{cases} x^q(1-x)^p=(1-t)^q t^p,\ dx=-dt \\ x=0 \iff t=1\ ;\ x=1 \iff t=0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad I(q,\ p)=\int_1^0 (1-t)^q t^p(-1)dt=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt=I(p,\ q)$$

(2)　部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I(p,\ q)&=\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^q dx \\ &=\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\cdot(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1 \frac{1}{p+1}x^{p+1}\cdot(-q)(1-x)^{q-1}dx \\ &=\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{q}{p+1}I(p+1,\ q-1) \end{aligned}$$

(3)　(2)で示した関係式を繰り返し用いると，

$$\begin{aligned} I(m,\ n)&=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2) \\ &=\cdots=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}\cdot\frac{1}{m+n}I(m+n,\ 0) \end{aligned}$$

を得る．一方

$$I(m+n,\ 0)=\int_0^1 x^{m+n}dx=\left[\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1=\frac{1}{m+n+1}$$

であるから，

$$I(m,\ n)=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(m+n+1)(m+n)\cdot\cdots\cdot(m+1)}=\boldsymbol{\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}}$$

研究　(3)で示したことから，$I(p,\ q)$ は，二項係数の逆数 $\dfrac{1}{{}_{p+q}C_p}=\dfrac{p!\,q!}{(p+q)!}$ を実数 p，q にまで拡張したような関数である．

大学以上では，$B(p,\ q)=I(p-1,\ q-1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ を，オイラ (L. Euler, 1707-83) のベータ関数と呼ぶ．なお，『数学Ⅱ』でよく用いた公式：
$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)dx=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ は，$\dfrac{1}{\beta-\alpha}(x-\alpha)=t$ と置換すれば，$I(1,\ 1)=B(2,\ 2)=1/6$ という，上で得た結果の特別の場合に帰着される．

B. 420

(イ)　$I_n=\int \sin^n x dx$ とするとき，

$nI_n=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x+(n-1)I_{n-2}$ …(＊)　が成り立つことを示せ．

(ロ)　上の関係式を用いて，つぎの各積分を求めよ．

(1)　$I_4=\int \sin^4 x dx$　　　(2)　$I_{-4}=\int \dfrac{dx}{\sin^4 x}$

アプローチ　(イ)は，$\sin^n x=\sin^{n-1}x\cdot\sin x$ とみて部分積分します．また(ロ)では(＊)の式を

$n\neq 0$ のとき $I_n=-\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ ……①

$n\neq -1$ のとき $I_{n-2}=\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n-1}+\dfrac{n}{n-1}I_n$ …②　と変形して使います．

解答　**(イ)**　$I_n=\int \sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'dx$

$=\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$　（◀ I_n の方程式になる）

$\therefore\ nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}$ ■　（◀ 両辺に不定積分が入っているので積分定数は省略している．）

(ロ)　(1)　(＊)より変形してできた①式に，$n=4$，$n=2$ を代入して

$$I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2,\quad I_2=-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0$$

これらと，$I_0=\int 1dx=x+C_1$（C_1 は積分定数）とを用い，

$$I_4=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+C$$

（◀ $C=\frac{3}{8}C_1$）

（C は積分定数）

(2)　(＊)より変形してできた②式で，順に $n=-2$，0 とおくと，

$$I_{-4}=\frac{-(\sin x)^{-3}\cdot\cos x}{3}+\frac{2}{3}I_{-2},\quad I_{-2}=-(\sin x)^{-1}\cos x+C_1$$

（C_1 は積分定数）

$$\therefore\ I_{-4}=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}-\frac{2\cos x}{3\sin x}+C$$

（◀ $C=\frac{2}{3}C_1$）

（C は積分定数）

B. 421

n を自然数として，$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とするとき，

n が偶数なら，$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n が奇数なら，$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

であることを示せ．

アプローチ 前問と同様，漸化式を利用して解きましょう．

解答 $S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'dx$

$$=\Big[-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$=\Big[-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)(S_{n-2}-S_n)$$

$n\geqq 2$ に対しては，右辺の第1項は0となるので，

◀ 一応，$n=1$ のときは別扱いとなる．

$$S_n=(n-1)(S_{n-2}-S_n)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{n-1}{n}S_{n-2}\ (n\geqq 2)$$

◀ これが $\{S_n\}$ のみたす漸化式

これを繰り返し用いると

$$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot S_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}S_{n-4}=\cdots\cdots$$

結局，n が偶数なら，$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_0$

　　　n が奇数なら，$S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot S_1$　……①

◀ 結果は $n=1$ のときにも正しい．

一方，$S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}$，$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$　……②

①②より，証明すべき式が得られる．■

B.422

$I=\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx$ を求めよ．

アプローチ 部分積分を2回繰り返すことで，I を求めます．

2通りの部分積分が考えられる．☞ 研究 ▶

解答 e^{2x} を微分する側，$\cos x$ を積分する側に選んで部分積分すると，

$$I=\int e^{2x}\cdot(\sin x)'dx=e^{2x}\sin x-\int(e^{2x})'\sin x\,dx$$

$$=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x\,dx$$

ここで，$\sin x$ を微分する側，e^{2x} を積分する側に選ぶと元に戻ってしまい意味がない！ ▶

次に，e^{2x} を微分する側，$\sin x$ を積分する側に選んで再び第2項を部分積分すると

$$I=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\cdot(-\cos x)'dx$$

$$=e^{2x}\sin x-2\left\{e^{2x}\cdot(-\cos x)+2\int e^{2x}\cos x\,dx\right\}$$

$$=e^{2x}(\sin x+2\cos x)-4I+C_1$$

両辺に現れた $\int e^{2x}\cos x$ は積分定数の分だけ異ってもよいので定数 C_1 がつく． ▶

これを I について解くと

$$\boldsymbol{I=\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C}\quad\left(C=\frac{1}{5}C_1\text{ は積分定数}\right)$$

研究 e^{2x} を積分する側，$\cos x$ を微分する側に選んで2回部分積分を実行しても，同様である．なお，これらの方法は，$I=\int e^{2x}\cos x\,dx$，$J=\int e^{2x}\sin x\,dx$ とおいて，I と J についての連立方程式

$I=e^{2x}\sin x-2J$，$J=-e^{2x}\cos x+2I$

を解くことと同じである．

一般に，上に示したのと同様にして

$\int e^{ax}\cos bx\,dx$，$\int e^{ax}\sin bx\,dx$ （a，b は0ではない定数）

を求めることができる．高校の範囲では，〈部分積分を2回使う〉といった技巧によってしか求められないこの種の積分も，大学では

$$\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$$

という指数関数の積分に帰着されるのだが，これは，大学に入ってからである．

B. 423

(1)　$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，$Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

とすると $P=Q$ であることを示し，これを利用してPの値を求めよ．

(2)　$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$ の値を求めよ．

アプローチ 原始関数(不定積分)を求めることなしに，定積分の値を求められることもあります．

解答　(1)　Pにおいて，$x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと

$dx=-dt$，$\sin x=\cos t$，$\cos x=\sin t$

で，積分区間は右のようになる．

x	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \searrow 0$

$$\therefore\quad P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=Q$$

◀ 余角の公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

◀ $P=Q$ が示せた．

よって

$$2P=P+Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\quad P=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

◀ $P+Q$ を考えるのがカギ．

(2)　上の(1)の場合と同様の置換積分により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$

◀ 一般に $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

であるから

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

◀ ☞ B. 413

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\tan 3\pi/8}{\tan\pi/8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

◀ $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$　$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$

$$\therefore\quad J=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)}$$

Repos

＜天国の数学座談会 (1)＞

司会：「現世の皆様，こんにちは．おなじみ＜天国からお送りする数学座談会＞の時間です．本日お集まりいただいたのは現世でも著名な方々ばかりですから，いまさらご紹介するまでもないでしょう．さて今日のテーマは……☆♂◇◎□▽……」

放送局：「ただいまいたずら好きの天使による妨害があり一部音声が途切れております．」

司会：「…… それでは年齢順ということで，はじめにユークリッド先生からお願いします．」

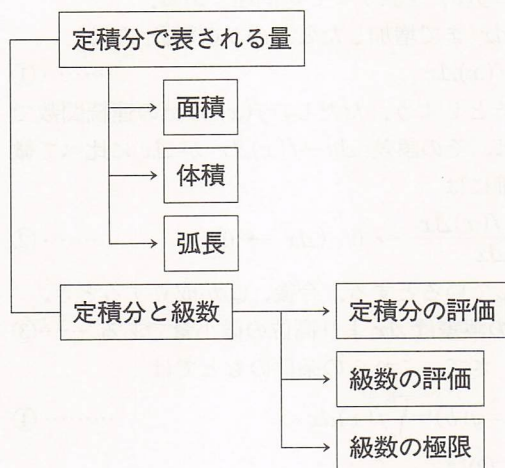
ユークリッド：「それは，その上にある点について一様に横たわる幅のない長さである．」

デカルト：「何だかいかめしいだけで，失礼ですがよく分かりませんね．私の方法を使えば，明晰かつ判明に表現できます．すなわち１次式で表されるものです．」

ニュートン：「私はさらに，力が働かなければ物体はそれに沿って等速で運動する，と考えることにしました．このことと運動方程式，そして，万有引力を仮定して，リンゴの落下と惑星の回転を統一的に説明できました．」

ハミルトン：「ニュートン先生，私の発見によれば，物体がそのように運動するのは，それが自然にとって最適なコースであるからです．自然は最適に営なまれているのです．」

リーマン：「いやいや，そもそも空間自体が，先輩方がお考えのように，どちらを向いてもどこから見ても同じように無限に広がっている絶対空間とは限りません．空間はある意味で歪んでいるかも知れないのです．この空間の歪みを視野におけば，反対に，それを２点間の最短径路として定義すべきでしょう．」

―― p.233 に続く ――

A5.1　定積分で表される量

面積，体積，曲線の長さなどが定積分で表されることは応用上きわめて大切である．ここでは，定積分による表示を導く一般的な考え方を述べておこう．いま，2変数 x，y について，y は x の関数であり，かつ，$x=a$ のとき $y=0$ とする．そして，$x=b$ のときの y の値 $I=y(b)$ を表すことが問題である．

x が x から $x+\varDelta x$ まで増加したときの y の増分 $\varDelta y$ が

$$\varDelta y \fallingdotseq f(x)\varDelta x \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と近似的に表されるとしよう．ただし，$f(x)$ は x の連続関数であり，①の近似式は，その誤差 $\varDelta y-f(x)\varDelta x$ が $\varDelta x$ に比べて微小であること，正確には

$$\frac{\varDelta y-f(x)\varDelta x}{\varDelta x} \to 0 \quad (\varDelta x \to 0) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

であることを意味しているとする．今後，②が成立するとき，

$\varDelta y \fallingdotseq f(x)\varDelta x$ の誤差は $\varDelta x$ より高位の微小量である ……③

ということにする．さて，これらの条件のもとでは

$$I=y(b)=\int_a^b f(x)dx \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

が成立する．実際，②は

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=f(x)，\text{すなわち，}\frac{dy}{dx}=f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

を意味し，これと $y(a)=0$ とから④が得られるからである．

1°　上の扱いで，$y(a)$ が 0 と限らないときは，y の代りに

$$z(x)=y(x)-y(a) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

を用いて考察すると，

$$\begin{aligned}\varDelta z&=y(x+\varDelta x)-y(a)-(y(x)-y(a))\\&=\varDelta y \fallingdotseq f(x)\varDelta x\end{aligned}$$

かつ $z(a)=0$ であるので

$$z(b)=\int_a^b f(x)dx$$

よって

$$y(b)=y(a)+\int_a^b f(x)dx \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

が得られる，

A5.2 面　積

I．基本形

以下に現れる関数はすべて連続とする．

［定理］ $a<b$ とする．$f(x)$，$g(x)$ が区間 $[a,\ b]$ において，

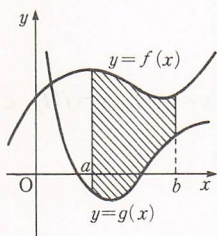
$$f(x) \geqq g(x)$$

をみたすとき，2曲線

$y=f(x)$，$y=g(x)$ および2直線 $x=a$，$x=b$

で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

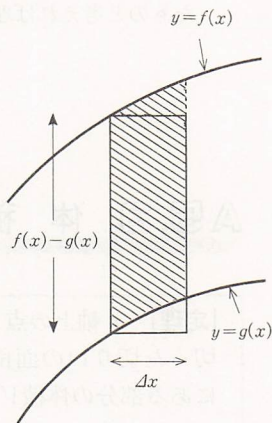
である．

1°　この図形の，x 座標が a と x との間にある部分の面積を $S(x)$ とすれば，$S(a)=0$ であり，求める S は $S(b)$ に等しい．

一方，x の微小増分 $\varDelta x$ に対する S の増分（右図の斜線部）$\varDelta S$ は

$\varDelta S \fallingdotseq$［高さ $f(x)-g(x)$，
底辺 $\varDelta x$ の長方形の面積］
$=(f(x)-g(x))\varDelta x$

を満たし，誤差は $(\varDelta x)^2$ の程度であり，$\varDelta x$ に比べて高位の微小量である．

よって，$\dfrac{dS}{dx}=f(x)-g(x)$

$\therefore\quad S=S(b)=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

II.　ヴァリエイション

媒介変数表示

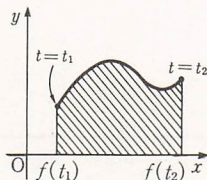
$$x=f(t),\ \ y=g(t),\ \ t_1 \leqq t \leqq t_2 \qquad \cdots\cdots ①$$

で表される曲線と3直線

$$x=f(t_1),\ \ x=f(t_2),\ \ y=0$$

で囲まれた下図の斜線部分の面積 S は

$$S=\int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ②$$

で与えられる．ただし，$g(t)>0$ とする．

1°　これは $S=\int_a^b y\,dx$ において $y=g(t)$，$x=f(t)$ と置換積分したものと考えれば理解できよう．

A5.3　体　積

[定理]　x 軸上の点 $(x,\ 0,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積が $S(x)$ で与えられる立体の $a \leqq x \leqq b$ にある部分の体積 V は

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

である．

1°　証明の論法は，面積の定理（A5.2 I）と同様である．

この立体の x 座標が a と x の間にある部分の体積を $V(x)$ とすると，V の増分は

$\varDelta V \fallingdotseq$[底面積 $S(x)$，高さ $\varDelta x$ の柱体の体積]
$= S(x)\varDelta x$
で，誤差は $\varDelta x^2$ 程度である．

A5.4 弧　長

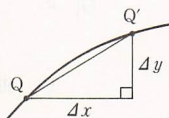
I．道のり

xy 平面上を動く動点Pの座標 x，y および速度ベクトル $\vec{v}$ の成分 v_x，v_y は時間 t の関数で

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

なる関係がある．

時間 $t=\alpha$ から $t=\beta$ まで点Pが描く軌道 C の長さを求めよう．

時間 t の値が t の点をQ，$t+\varDelta t$ の点をQ′とすれば，$\varDelta t$ が十分小さいとき，曲線 C のQ，Q′間の部分の長さ $\varDelta L$ は弦QQ′の長さで十分よく近似されていると考えてよい．

一方，$QQ' = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}$ であるが

$$\varDelta x \fallingdotseq v_x(t)\varDelta t,\quad \varDelta y \fallingdotseq v_y(t)\varDelta t$$

なる近似式が成立し，誤差は $\varDelta t$ に比べて高位の微小量である．よって，$\varDelta t$ より高位の微小量を誤差として

$$QQ' \fallingdotseq \sqrt{\{v_x(t)\}^2 + \{v_x(t)\}^2}\varDelta t,\quad \varDelta L \fallingdotseq QQ'$$

が成立する．したがって

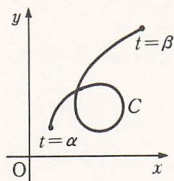
$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \text{となり}$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

が成立する．あるいは，点Pの速さ（速度の大きさ）は $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$ であるから，

$$L = \int_\alpha^\beta v\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\,dt$$

が成立すると考えてもよい

II. 弧　長

［定理］ $f(t)$，$g(t)$が微分可能のとき，媒介変数表示

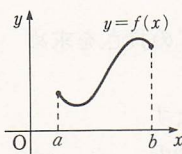
$x=f(t),\ y=g(t),\ \alpha \leqq t \leqq \beta$

で定義される曲線Cの長さLは

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

1° 証明は上記のIから読み取れる．

III. ヴァリエイション

［定理］ 曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ なる部分の長さLは

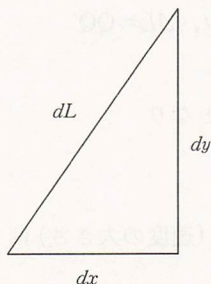
$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

で与えられる．

1° 曲線 $y=f(x)$，$a \leqq x \leqq b$ は媒介変数表示

$$x=t,\ y=f(t),\ a \leqq t \leqq b$$

をもつ．これに上記IIの定理を適用すればよい．

2° I，II，IIIの議論を次のようにこだわりのない形式的記号の運用でまとめておこう．

$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

A5.5　定積分と級数

I．定積分の評価

原始関数の計算が困難で，定積分の正確な値が分からなくても，定積分の値の範囲を不等式によって限定できる場合がある．これを定積分の評価という．

定積分の評価

［定理］ $a<b$ とする．

(i) $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ が成立するとき

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$$

(ii) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$$

1°　証明：(i)　$h(x)=g(x)-f(x)$ とおく，$h(x)$ の原始関数を $H(x)$ とおくと，

$$\frac{d}{dx}H(x)=g(x)-f(x) \geqq 0$$

よって，$H(x)$ は減少しない．従って

$$H(a) \leqq H(b) \qquad \therefore \quad H(b)-H(a) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \int_a^b (g(x)-f(x))dx \geqq 0$$

$$\therefore \quad \int_a^b g(x)dx \geqq \int_a^b f(x)dx$$

(ii)　$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ に注意して，(i)を用いればよい．

2°　例　$0 \leqq e^{-x^2} \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ であるから

$$0 \leqq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leqq 1$$

II．級数の評価

［定理］ $x>0$ において連続関数 $f(x)$ が減少するならば，

$$f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n+1) \leqq \int_1^{n+1} f(x)dx \leqq f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$$

1°　$f(k+1) \leqq \int_k^{k+1} f(x)dx \leqq f(k)$ を k について 1 から n まで加えると上式が得られる．

2°　この定理を用いて，無限級数

$$f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)+\cdots\cdots$$

の収束，発散を断定し得ることがある．

例　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ にとれば，$\displaystyle\int_1^{n+1}f(x)dx=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\log(n+1)$

$$\therefore\quad \log(n+1)\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

なる不等式が得られる．

$n\to\infty$ のとき $\log(n+1)\to+\infty$ であるから，上式より

級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ が $+\infty$ に発散することが

わかる．

3°　$f(x)$ が増加なら，定理の不等号は逆向きになる．

III.　級数の極限

関数 $f(x)$ から作った

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

という数列は，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の近似和と見なせる．

（☞A4.5）　よって

[定理]　$0\leqq x\leqq 1$ で連続な関数 $f(x)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

が成立する．

1°　例　$a_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$ とする．

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ を考えると，$a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

と書けるので，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$$

—— A5　おわり ——

Repos

<天国の数学座談会 (2)>

ヒルベルト：「『現世』に生きている人間には，概念について論理的なこと以外決定的なことは何もいえないはずです．だから私はこれを単に『2点によって定まるもの』といいますが，これによって最終的に何か意味されているかは問題にしていません．そもそもその様なことを決定することは論理的には不可能です．でも数学的にはこれで十分だと私は考えました．」

アインシュタイン：「……私はそれを光の径路であると考えます．そう考えることによって幾何学は数学から物理学に変わるのです．そしてこの考えを押し進めることによって『現世』の時間と空間は単なる「入れ物」ではなく物理学の対象となり，ニュートン先生の引力の理論を大変満足の行く形に発展させることができました．……」

司会：「さっぱり分からなくなりました．一体どなたが正しいのでしょうか．」

神様：「……」（ただ微笑むだけ）

天使1：「人間が考えることで完全に正しいことはありません．」

天使2：「正しいものは一つと考えること自身，現世的発想です．」

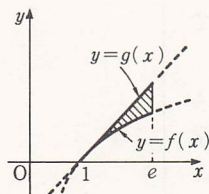
天使3：「人が『現世』で見るというたかたの如き夢に何の優劣がありましょう．」

天使4：「現世の人には難しい謎に見えることも，天国では，実に単純な真理です．」

悪魔：「いや，いや．深い深い謎を深く深く追い続けるのが現世の楽しみ，生きる醍醐味．いひっひー」

B. 501

曲線 $y=\log x$ と，その上の点 $(1,\ 0)$ での接線，および直線 $x=e$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ．

アプローチ 積分を利用して面積を求める際には，考えるべき図形の概形を描くのが最初の仕事です．本問のような問題では曲線と接線との位置関係（とくに上下関係）をこれによって確認することができるからです．

解答 $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ より点 $(1,\ 0)$ における接線は，

$$y=x-1$$

であり，S は左図の斜線部の面積である

$$S=\int_1^e(x-1)\,dx-\int_1^e\log x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\int_1^e(x-1)\,dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}(e-1)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

また，部分積分法を用いて

$$\int_1^e\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x(\log x)'\,dx=e-\int_1^e 1\,dx=e-(e-1)=1 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③を①に代入して

$$S=\frac{1}{2}(e-1)^2-1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2-2e-1)}$$

注意 "$\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ （C：積分定数）" はよく出てくるので，覚えている人もいるくらいです．

B.502

直角双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と2直線 $y=mx$，$y=nx$ $(m>n>0)$ とが第1象限に囲む部分の面積Sを求めよ．

アプローチ 面積を計算するのに，定積分を用いるのは，数II以来の常識でしょう．図形をうまく「切ったり貼ったり」すると，この計算が面白いほど単純化されます．

解答　Sは右図の斜線部の面積である

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ y=mx \\ y=nx \end{cases}$$

2直線と直角双曲線との交点は，

$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}},\ \sqrt{m}\right)$　$\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{n}\right)$

となる

M，Nからx軸にひいた垂線の足をM′，N′とすると

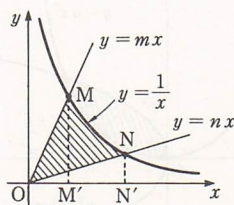
Oを原点として

$S=(\triangle \mathrm{OMM'})+(\text{図形 } \mathrm{MM'N'N})-(\triangle \mathrm{ONN'})$

となる．

$\triangle \mathrm{OMM'}=\triangle \mathrm{ONN'}=\dfrac{1}{2}$　◀ M，Nは $xy=1$ 上の点

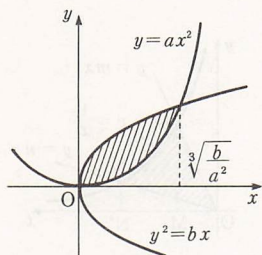
で，これらは打ち消しあうから

$$\begin{aligned} S&=(\text{図形 } \mathrm{MM'N'N}) \\ &=\int_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{1}{x}dx \\ &=\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{\sqrt{m}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &=\log\frac{1}{\sqrt{n}}-\log\frac{1}{\sqrt{m}} \\ &=\log\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

B. 503

4つの曲線

$y=ax^2$，$y^2=bx$，$y=x^2$，$y^2=x$

で囲まれた部分の面積 S を求めよ．ただし，$0<b<1<a$ とする．

アプローチ 基本的な問題ですが，要領の良し悪しで，計算の手間がずい分違います．

解答 まず，a，b を任意の正の定数として2曲線

$y=ax^2$ ………①

$y^2=bx$ ………②

で囲まれる部分の面積 $S(a, b)$ を求める．①，②の交点の x 座標を求めるために，y を消去すると

$(ax^2)^2=bx$

$\therefore\quad x(a^2x^3-b)=0$

$\therefore\quad x=0$ または $x=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a^2}}$

となる．

したがって

$$S(a, b)=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}}(\sqrt{bx}-ax^2)\,dx$$

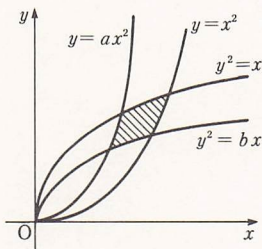
$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{b}\,x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^{\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{a}-\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{3a}$$

さて，求めるべき S は，左図の斜線部の面積であるから

$S=S(1, 1)-S(a, 1)-S(1, b)+S(a, b)$

と表される．これに上で得た結果を代入すると，

$$S=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{a}-b+\frac{b}{a}\right)=\boldsymbol{\frac{(a-1)(1-b)}{3a}}$$

B.504

つぎの不等式で指定される領域の面積Sを求めよ．

$$2x^2-2xy+y^2\leqq 1 \quad \cdots\cdots ① \qquad かつ \qquad y\geqq\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ②$$

アプローチ　まず，どんな領域を表すかを調べて，概形を図示すると，計算の見通しが立てやすくなります．

解答　①をyについて解くと

$$y^2-2x\cdot y+(2x^2-1)\leqq 0$$

$$x-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq x+\sqrt{1-x^2}$$

したがって，①は2曲線

$$y=x-\sqrt{1-x^2} \quad \cdots\cdots ③$$

$$y=x+\sqrt{1-x^2} \quad \cdots\cdots ④$$

で囲まれた領域である，そして③，④の概形は，直線　$y=x$　と半円$y=\pm\sqrt{1-x^2}$　を図の上で加え合せることで得られる．

さて，①をxにつき整理し，xについて解けば，

$$2x^2-2y\cdot x+(y^2-1)\leqq 0$$

$$\frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}\leqq x\leqq\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}$$

これより，yの最大値は$\sqrt{2}$である．

（図のM点に対応）

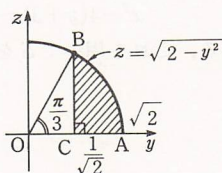
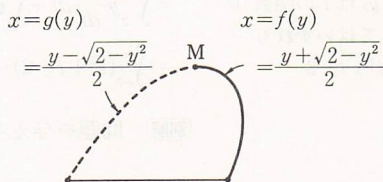
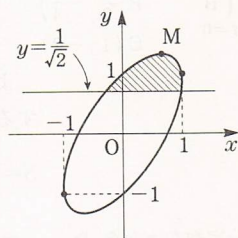
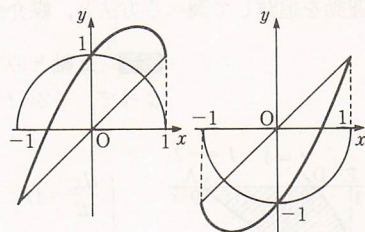
$x=g(y)=\dfrac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}$　M　$x=f(y)=\dfrac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}$

よって，求める面積Sは

$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\left\{\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}-\frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}\right\}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-y^2}\,dy$$

$=$(扇形OAB)$-$(△OBC)

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

◀ 定積分の値を図形的に求めている．

［注］　①をxについて解いて，Sをyについて積分したのは，前半の考察により，xで積分するより，yで積分する方が簡単な計算で済むことがわかったからである．

B.505

媒介変数表示

$x=2t^2+1,\ y=t^2+t-2$（t はすべての実数値をとる）

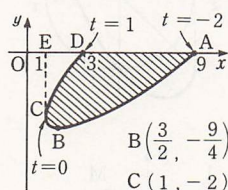
で表される曲線と x 軸とによって囲まれる部分の面積 S を求めよ．

アプローチ　まず，曲線の概形を知ることが必要です．それには，媒介変数表示のまま点の運動を追跡して調べる方法と，媒介変数を消去してから調べる方法とがあります．

解答　x 軸との交点に対応する t は，$y=0$ より $t=-2,\ 1$

よって，$-2\leqq t\leqq 1$ での x，y の変化を調べると次のようになる．

$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$

$\mathrm{C}(1,\ -2)$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4t\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2t+1\end{cases}$$

t	-2		$-\frac{1}{2}$		0		1
x	9	↘	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	3
y	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2	↗	0

よって，左図の斜線部の面積が S である．そこで，弧 ABC に対する y を y_1，弧 CD に対する y を y_2 と書くことにすれば，

$$S=\left(\begin{matrix}\text{図形}\\\text{ABCE}\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}\text{図形}\\\text{CDE}\end{matrix}\right)=\int_1^9(-y_1)dx-\int_1^3(-y_2)dx$$

積分定数を x から t に置換した ▶

$$=\int_0^{-2}(-y_1)\frac{dx}{dt}dt-\int_0^1(-y_2)\frac{dx}{dt}dt$$

y_1，y_2 は t の関数としてはいずれも $y=t^2+t-2$ ▶

$$=\int_{-2}^0 y\frac{dx}{dt}dt+\int_0^1 y\frac{dx}{dt}dt=\int_{-2}^1 y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{-2}^1(t^2+t-2)\cdot 4t\,dt=4\int_{-2}^1(t^3+t^2-2t)dt=\mathbf{9}$$

別解　問題を与えられた 2 式から t^2 を消去すると

$$x-2y=-2t+5$$

これを用いて t を消去すると，x，y の関係式

$$x^2-4(y+3)x+(4y^2+20y+27)=0$$

が得られる，これを用いて S を求めることもできる．

B.506

x，y，z 空間において

(1)　$x^2 \leqq y$，$y^2 \leqq z$，$z^2 \leqq x$ をみたす立体の体積 V_1 を求めよ．

(2)　$x \geqq 0$，$x^2+y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq y^2$ をみたす立体の体積 V_2 を求めよ．

アプローチ　立体の体積を求めるには，まず定直線(ふつうは座標軸)に垂直な平面による切断面の面積を求めます．

解答　(1)　t を定数として，平面 $x=t$ による切り口を考える．与えられた x，y，z の不等式に $x=t$ を代入すると，

$$t^2 \leqq y \quad y^2 \leqq z \leqq \sqrt{t}$$

となるので，切り口を，これと平行な yz 平面に正射影したものは右図のようになる．ただし，切り口が存在するのは

$$t^2 \leqq \sqrt[4]{t} \qquad \text{より} \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

のときであり，その面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\int_{t^2}^{\sqrt[4]{t}}\{\sqrt{t}-y^2\}dy=\left[\sqrt{t}\,y-\frac{y^3}{3}\right]_{t^2}^{\sqrt[4]{t}}$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{4}}-t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}t^6 \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

①，②より

$$V_1=\int_0^1 S(t)dt=\left[\frac{8}{21}t^{\frac{7}{4}}-\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{21}t^7\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

(2)　t を定数として，平面 $y=t$ による切り口を考える．切り口の xz 平面への正射影は

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2},\ 0 \leqq z \leqq t^2$$

で表される右図のような長方形の領域となる．ここで

$$1-t^2 \geqq 0 \qquad \text{より} \qquad -1 \leqq t \leqq 1$$

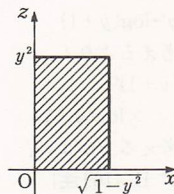
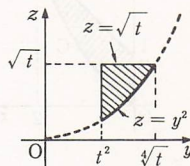
このとき面積は $t^2\sqrt{1-t^2}$ であるから

$$V_2=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$$

この積分を計算するために $t=\sin\theta$，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ と置換すると，

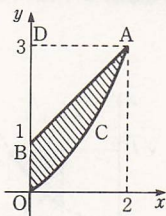
t	0	$\nearrow$	1
θ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

$$V_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

B. 507

曲線 $y=2^x-1$，$0\leqq x\leqq 2$ と線分 $y=x+1$，$0\leqq x\leqq 2$ および y 軸として囲まれる部分を K とする．

(1)　K を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_x を求めよ．

(2)　K を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_y を求めよ．

解答　K を図示すると，左図の斜線部となる．

(1)　点 $(x,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面によるこの立体の切り口の面積を積分することにより

$$V_x=\int_0^2\pi\{(x+1)^2-(2^x-1)^2\}dx$$
$$=\pi\int_0^2(x^2+2x-2^{2x}+2^{x+1})dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{2^{2x}}{2\log 2}+\frac{2^{x+1}}{\log 2}\right]_0^2=\left(\frac{20}{3}-\frac{3}{2\log 2}\right)\pi$$

▶ $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\log a}+C$

(2)　$V_y=\begin{pmatrix}\text{図形 OCAD を回転して}\\\text{得られる立体の体積 } V_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{△BAD を回転して得}\\\text{られる円錐の体積 } V_2\end{pmatrix}$　………①

まず V_1 は

$$y=2^x-1 \iff x=\log_2(y+1)=\frac{\log(y+1)}{\log 2}$$

▶ 対数の底を e になおしておく方がいい．

より，$V_1=\pi\int_0^3 x^2dy=\dfrac{\pi}{(\log 2)^2}\int_0^3\{\log(y+1)\}^2dy$

と表せる．ここで

$$\int_0^3\{\log(y+1)\}^2dy=\Big[(y+1)\{\log(y+1)\}^2\Big]_0^3-2\int_0^3\log(y+1)dy$$
$$=16(\log 2)^2-2\left\{\Big[(y+1)\log(y+1)\Big]_0^3-\int_0^3 dy\right\}$$
$$=16(\log 2)^2-16(\log 2)+6$$

▶ $\log(y+1)$ $=y'\cdot\log(y+1)$ と考えるよりも，$=(y+1)'\times\log(y+1)$ と考える方がよい．☞ B. 416 [注]

であるから，$V_1=\left(16-\dfrac{16}{\log 2}+\dfrac{6}{(\log 2)^2}\right)\pi$　………②

一方，$V_2=\dfrac{\pi}{3}\cdot 2^2\cdot 2=\dfrac{8\pi}{3}$　………③

①，②，③より，$V=V_1-V_2=\boldsymbol{\left(\dfrac{40}{3}-\dfrac{16}{\log 2}+\dfrac{6}{(\log 2)^2}\right)\pi}$

［注］ (2)の V_1 を求めるのに，積分変数を x に置換し，右の対応を考え

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^3 x^2dy=\int_0^2 x^2\frac{dy}{dx}dx=\int_0^2 x^2\cdot(2^x)'dx=\cdots\cdots \text{としてもよい．}$$

y	0	↗	3
x	0	↗	2

B.508

xyz 空間において，点O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 1) を含む平面上にAを中心とする半径1の円板がある．この円板を z 軸のまわりに1回転してできる立体を V とする．C(0, 0, t) を通り z 軸に垂直な平面 α_t で V を切ったときの切り口の面積を $S(t)$ とする．

(1)　$S(t)$ を求めよ．

(2)　V を求めよ．

アプローチ　円板を回転してできる立体 V を平面 α_t で切ったときの切断面は，円板自身を平面 α_t で切った切り口の線分を，回転軸のまわりに回転してできる図形にほかなりません！

解答　(1)　原点OとBを通る直線を l，C(0, 0, t) を通り z 軸に垂直な平面を α_t，また，平面 α_t と直線 l との交点をP，平面 α_t と円板の周の交点を Q_1，Q_2 とする．

P(0, t, t) であるから，Q_1，Q_2 の座標は (q, t, t) とおくことができ，$AQ_1=AQ_2=1$ より，Q_1，Q_2 の座標は $(1\pm\sqrt{1-2t^2},\ t,\ t)$ である．また $S(t)$ は CQ_1，CQ_2 を半径とする2つの同心円に囲まれた部分の面積であるから

$$S(t)=\pi\{(1+\sqrt{1-2t^2})^2+t^2\}-\pi\{(1-\sqrt{1-2t^2})^2+t^2\}$$
$$=\boldsymbol{4\pi\sqrt{1-2t^2}}$$

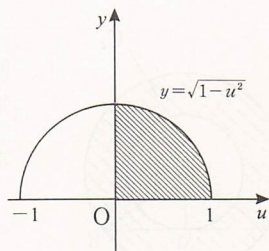
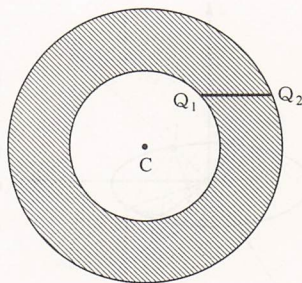
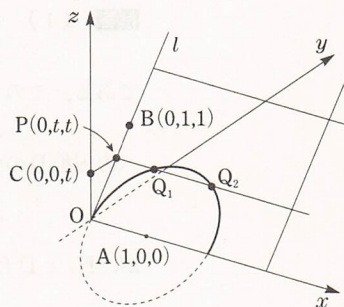
ただし，切り口の存在条件　$1-2t^2\geqq 0$

より，t の範囲は $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である．

(2)　(1)の結果より，求める体積 V は

$$V=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}S(t)\,dt=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}4\pi\sqrt{1-2t^2}\,dt$$
$$=8\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-2t^2}\,dt$$

ここで，$\sqrt{2}\,t=u$ と置換する．右図より，

$$V=8\pi\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,du=\frac{8\pi}{\sqrt{2}}\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\sqrt{2}\,\pi^2}$$

B.509

円板D：$x^2+y^2 \leqq 1$，$z=0$ を直線 l：$x=y=z$ を軸として1回転してできる立体をKとする．

(1)　l 上の点 $P(t,\ t,\ t)$ を通り l に垂直な平面 H_t がDと共有点をもつような t の値の範囲を求めよ．

(2)　平面 H_t と円板Dとの交わりが l のまわりに回転してできる図形 C_t を考察することにより，Kの体積 V を求めよ．

アプローチ C_t の面積を t で積分するだけでは，体積 V が正しく求められない．というのが本問のポイントです．

解答　(1)　平面 H_t の方程式は

$$x+y+z=3t \quad \cdots\cdots ①$$

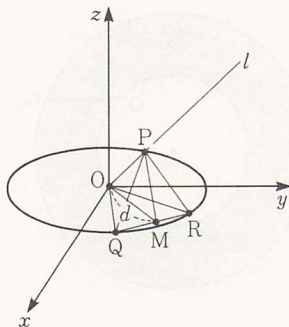
である．この H_t と xy 平面 $z=0$ との交わりの直線

$$x+y-3t=0 \quad \cdots\cdots ②$$

への円板Dの中心Oからの距離 d を考え

$$d=\frac{|-3t|}{\sqrt{2}} \leqq 1 \text{（円板Dの半径）} \quad \cdots\cdots ③$$

が，H_t とDとが共有点をもつ条件である．③より

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(2)　平面 H_t と円板Dとの交わりは線分である．その両端をQ，Rとし，中点をMとする．この線分を l のまわりに回転してできる図形 C_t は2つの同心円に囲まれた部分（リング）であって，外側の円の半径は PQ=PR，PM⊥QR を考えて，内側の円の半径はPMであり，C_t の面積 S_t は，

$$S_t=\pi(\overline{PQ}^2-\overline{PM}^2)=\pi\overline{QM}^2 \quad \cdots\cdots ④$$

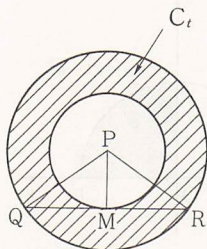
ところがOM⊥QRでもあるから

$$\overline{QM}^2=\overline{OQ}^2-\overline{OM}^2=1^2-d^2=1-\frac{9}{2}t^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

図形 C_t は，立体Kの平面 H_t による切り口でもある．

平面 H_t と $H_{t+\Delta t}$ との間隔は $\sqrt{3}\Delta t$ であるから，(1)も考えて

求める体積 $V=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} S_t\sqrt{3}\,dt=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\sqrt{3}\,\pi\left(1-\frac{9}{2}t^2\right)dt$

$=2\sqrt{3}\,\pi\left[t-\frac{3}{2}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{6}\,\pi}{9}}$

B.510

楕円 $x^2-2xy+2y^2=4$……① で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ．

アプローチ 既知の公式のどれかにあてはめようとして焦ると，なかなかうまくいきません．実直な態度で丹念に計算します．

解答 ①を y について解くと

$$y=\frac{1}{2}\{x+\sqrt{8-x^2}\} \quad \cdots\cdots②$$

$$y=\frac{1}{2}\{x-\sqrt{8-x^2}\} \quad \cdots\cdots③$$

②，③のおおよその形は，直線 $y=x$ と半円 $y=\pm\sqrt{8-x^2}$ を図の上で合成し，y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍することにより得られる．以上より，②，③の概形は右図のようになる．

②に対応する y を y_1，③に対応する y を y_2 と書くことにする．求める体積 V は，だ円の $x\geqq0$ の部分を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積の2倍である．

すなわち，

$$V_1=\pi\int_0^{2\sqrt{2}} {y_1}^2 dx$$

$$V_2=\pi\int_2^{2\sqrt{2}} {y_2}^2 dx$$

とおくと，$V=2(V_1-V_2)$

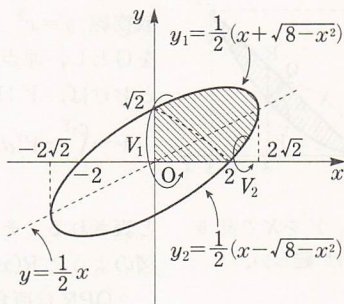
ところで，

$$V_1=\frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}(8+2x\sqrt{8-x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[8x-\frac{2}{3}(8-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{3}\pi$$

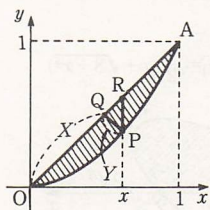
$$V_2=\frac{\pi}{4}\int_2^{2\sqrt{2}}(8-2x\sqrt{8-x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[8x+\frac{2}{3}(8-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^{2\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\pi-\frac{16}{3}\pi$$

$$V=2(V_1-V_2)=\boldsymbol{\frac{16(2+\sqrt{2})}{3}\pi}$$

B.511

xy 平面上の図形

F：$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $x^2 \leqq y \leqq x$

を直線 $y=x$ のまわりに回転して得られる立体の体積Vを求めよ．

解答　F は左図の斜線部となる．

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ から直線 $y=x$ にひいた垂線の足をQとし，原点をOとして　　$\mathrm{OQ}=X$，$\mathrm{PQ}=Y$

とおけば，Y はXの関数となり，V は

$$V=\int_0^{\sqrt{2}} \pi Y^2 dX \quad \cdots\cdots\cdots①$$

直接，Y をXで表すのは 難しい．

と表される．そこで，X，Y を x で表すことを考える．

図のように $\mathrm{R}(x,\ x)$ をとると

△QPR は直角三角形で $\mathrm{PR}=x-x^2$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} Y&=\mathrm{PQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PR}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}} \\ X&=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}-\mathrm{QR}=\mathrm{OR}-\mathrm{PQ} \\ &=\sqrt{2}\,x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

X，Y の関係は x を媒介変数として表示されたことになる．

そこで，積分変数をXから x に置換すれば

X	$0 \quad \nearrow \quad \sqrt{2}$
x	$0 \quad \nearrow \quad 1$

$$V=\pi\int_0^1 Y^2 \frac{dX}{dx}dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x-x^2)^2(1+2x)dx=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{3}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\cdot\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}$$

参考　$\mathrm{OQ}=X$，$\mathrm{PQ}=Y$ とおく上の解法は，

「OA を x 軸に，それと垂直な方向を y 軸にとる」という“座標軸のとりかえ”を利用したことに相当している．

そして，$y=x^2$ は新座標系では $(*)$ により媒介変数表示されたことになる．

B. 512

曲線弧：$y=\frac{1}{2}x^2$，$0\leqq x\leqq 1$ の長さ L を求めよ．

アプローチ 弧長を求める公式は簡単ですが，ごくありふれた曲線でも弧長の計算は一般にかなりたいへんです．

解答 $\frac{dy}{dx}=x$ より $L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$

◀ この積分の計算は案外難しい．以下のように置換するほかに $\sqrt{1+x^2}=u-x$ と置く方法もある．☞ 参考

$x=\tan\theta$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ と置換すると，θ の積分区間は $0\leqq\theta\leqq\pi/4$ であり，

$$\begin{cases}\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\dfrac{1}{|\cos\theta|}=\dfrac{1}{\cos\theta}\\ dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta\end{cases}\qquad\therefore\quad L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

ここで，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n\theta\,d\theta$ $(n=0,\ \pm1,\pm2,\pm3\cdots\cdots)$ とおくと

◀ I_n についての漸化式を利用して．I_{-3} を計算しようとしている．*cf*. B. 420 B. 421

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-1}\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\Big[\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(n-1)\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\,d\theta\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

上式で $n=-1$ とすると，$I_{-3}=\frac{1}{2}I_{-1}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………①

◀ I_{-3} を I_{-1} に帰着

一方，$I_{-1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$ となり，ここで $\sin\theta=u$ と置換することにより

$$\begin{aligned}I_{-1}&=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{du}{1-u^2}=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\&=-\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{1/\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\\&=\log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots②$$

①，②より，$L=I_{-3}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

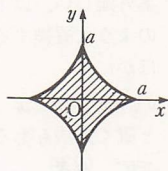
参考 実は $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}+C$ である．

B.513

アステロイド

a は正の実数とする．$x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ について，

(1)　その全長 L を求めよ．　(2)　その囲む部分の面積 S を求めよ．

アプローチ　概形を把握すれば計算を簡単にする工夫がすぐに見つかります．公式を機械的にあてはめるだけだと，まちがえてしまうかもしれません．

解答　(1)　アステロイドの概形は左図のようになる．

この曲線は両座標軸に関して対称だから，その第1象限内の部分すなわち，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対応する弧の長さを4倍すればよい．

$$\frac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $\sin2\theta\geqq0$ ▶

$$\therefore\quad \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{(3a\sin\theta\cos\theta)^2}=\frac{3a}{2}|\sin2\theta|=\frac{3a}{2}\sin2\theta$$

$$\therefore\quad L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a}{2}\sin2\theta\,d\theta$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta=6a\left[-\frac{\cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{6a}$$

(2)　上と同様，アステロイドの第1象限内の部分と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を4倍すればよい．

$$S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3\theta\cdot(-3a\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta$$

☞B.421 ▶　ここで $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$ とおくと $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq2)$ であるから，

$$S=12a^2(I_4-I_6)=2a^2\cdot I_4=2a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0=\frac{3}{8}\pi a^2$$

注意　(1)の解答中，$\sqrt{\sin^2 2\theta}=|\sin2\theta|=\sin2\theta$ としてきたのは，積分区間 $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ において $\sin2\theta\geqq0$ だからである．もし，アステロイドの第2象限の部分だけを求めるなら

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\sin2\theta|\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin2\theta)d\theta=\left[\frac{\cos2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$$

のように計算することになる．なお．パラメータ θ を消去して計算することも不可能ではないが，少し面倒である．

B. 514

サイクロイド

$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta),\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$

と x 軸で囲まれた部分をD，Dを x 軸のまわりに回転して得られる立体をBとする．つぎのおのおのを求めよ．

(1)　Dの面積 S　　　　　(2)　Bの体積 V

アプローチ　媒介変数表示された曲線のかこむ面積の処理法は既に学んだ．☞B. 505, B. 513

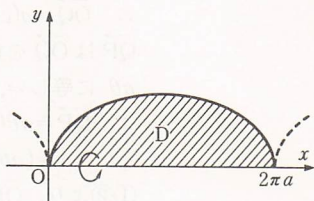
媒介変数表示された曲線を回転して得られる立体の体積，表面積も同様にして求められる．

解答　（1）　$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} y\dfrac{dx}{d\theta}d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\{a(1-\cos\theta)\}^2 d\theta$

$=a^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$=a^2\left[\theta-2\sin\theta+\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$

$=\boldsymbol{3\pi a^2}$

（2）　$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi} y^2\dfrac{dx}{d\theta}d\theta$

$=\pi\int_0^{2\pi}\{a(1-\cos\theta)\}^3 d\theta$

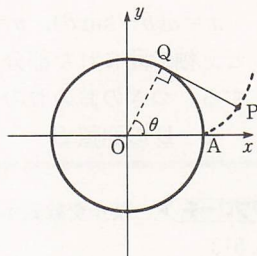
$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left\{1-3\cos\theta+\dfrac{3}{2}(1+\cos 2\theta)-\dfrac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\right\}d\theta$　　◁ 三倍角の公式

$=\pi a^3\left[\dfrac{5}{2}\theta-\dfrac{15}{4}\sin\theta+\dfrac{3}{4}\sin 2\theta-\dfrac{1}{12}\sin 3\theta\right]_0^{2\pi}$

$=\boldsymbol{5\pi^2 a^3}$

B.515

半径 a の糸巻から糸をぴんと張りつつほどいていく．

(1)　右図のように糸巻の中心が原点，ほどきはじめの糸の端点Pが x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ にあるようにしたとき，ほどかれた糸の直線部分と糸巻との接点Qと原点Oとを結ぶ動径の x 軸からの回転角 θ を媒介変数として，糸の先端Pのえがく曲線の方程式をつくれ．

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき線分PQの通過する部分の面積 S を求めよ．

アプローチ　動点の描く曲線（軌跡）を数学的に叙述するのに，媒介変数表示がいかに魅力的で強力な方法であるか，実感して下さい．

解答　(1)　OQは大きさが a で，x 軸からの回転角が θ のベクトルである．

∴　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a(\cos\theta,\ \sin\theta) = (a\cos\theta,\ a\sin\theta)$　………①

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を負の向きに $90°$ 回転した方向をもち，大きさは $\widehat{\mathrm{AQ}} = a\theta$ に等しい．

∴　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = a\theta(\cos(\theta - 90°),\ \sin(\theta - 90°))$

$= (a\theta\sin\theta,\ -a\theta\cos\theta)$　………②

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$= a(\cos\theta + a\theta\sin\theta,\ a\sin\theta - a\theta\cos\theta)$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$\begin{cases} \boldsymbol{x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)} \\ \boldsymbol{y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)} \end{cases}$

(2)　$\dfrac{dx}{d\theta} = a\theta\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = a\theta\sin\theta$

より，x，y の値は下表のように変化し，したがってPは左図のような曲線を描く．

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	a	↗	$\frac{\pi a}{2}$	↘	$-a$	↘	$-\frac{3\pi a}{2}$	↗	a
y	0	↗	a	↗	πa	↘	$-a$	↘	$-2\pi a$

$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$，$\pi/2 \leqq \theta \leqq 3\pi/2$，$3\pi/2 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対応する y をそれぞれ $y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$ とおくと

$$S=\int_{-3\pi a/2}^{\pi a/2}\{y_2(x)+a\}dx-\int_{a}^{\pi a/2}\{y_1(x)+a\}dx$$
$$+\int_{-3\pi a/2}^{a}\{-a-y_3(x)\}dx-\pi a^2$$
$$=-\int_{a}^{\pi a/2}y_1(x)dx-\int_{\pi a/2}^{-3\pi a/2}y_2(x)dx-\int_{-3\pi a/2}^{a}y_3(x)dx-\pi a^2$$

ここで，$x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$ とおくと，$y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$ のいずれも $a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ と表せるので，

$$S=-\int_0^{\pi/2}a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\cdot a\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\cdot a\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$-\int_{3\pi/2}^{2\pi}a(\sin\theta-\theta\cos\theta)\cdot a\theta\cos\theta d\theta-\pi a^2$$
$$=-a^2\left\{\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta\,d\theta\right\}-\pi a^2$$
$$=-a^2\left\{\int_0^{2\pi}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta-\int_0^{2\pi}\theta^2\cos^2\theta\,d\theta\right\}-\pi a^2$$
$$=-a^2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta\sin2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2\cos2\theta\,d\theta-\frac{4}{3}\pi^3\right\}-\pi a^2$$

ここで $\displaystyle\int_0^{2\pi}\theta^2\cos2\theta\,d\theta=\left[\theta^2\cdot\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2\theta\cdot\frac{\sin2\theta}{2}d\theta$

$$=-\int_0^{2\pi}\theta\sin2\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\sin2\theta\,d\theta=\left[\theta\cdot\frac{\cos2\theta}{-2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}1\cdot\frac{\cos2\theta}{-2}d\theta$$
$$=-\pi+\left[\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}=-\pi$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{S=\frac{4}{3}\pi^3a^2}$$

研究　OQ が微小角 $\Delta\theta$ だけ増加する間に積分 PQ の通過する微小部分の面積 ΔS は，

$\Delta S\fallingdotseq\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}^2\cdot\Delta\theta$（中心角 $\Delta\theta$，半径 PQ の扇形）

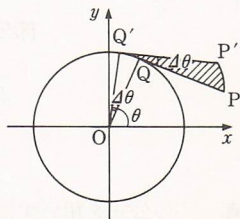
で近似できる（誤差は $\Delta\theta$ より高位の微小量）．

このことを利用すれば

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2$$

より求められる面積 S は，

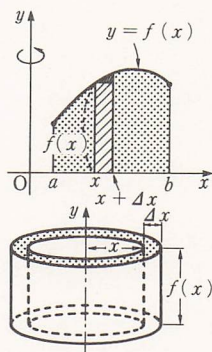
$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2$$

と簡単に求められる．§7 いろいろな曲線 で学ぶ極座標と深く関連する重要事項である．

B.516

(イ)　$0 \leqq a < b$ とする．$a \leqq x \leqq b$ で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ が $f(x) \geqq 0$ ならば，曲線 $y=f(x)$ と x 軸．および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V は，

$V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$ で与えられることを導け．

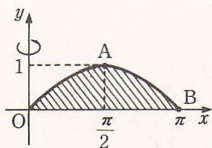
(ロ)　曲線 $y=\sin x$，$0 \leqq x \leqq \pi$ と x 軸とが囲む部分 F を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

アプローチ　積分を利用して体積を求めるためのアプローチは，1つではありません．ここで紹介するのは，回転体の体積を計算するための，もう1つのアプローチです．

解答　**(イ)**　x の微小な増分 Δx に対する V の増分 ΔV は区間 $[x, x+\Delta x]$ における $0 \leqq y \leqq f(x)$ の部分を y 軸のまわりの回転して得られる中空の筒形の立体の体積であるが，これは内径 x，外径 $x+\Delta x$，高さ $f(x)$ の中空円柱の体積にほぼ等しい．すなわち，

$$\Delta V \fallingdotseq \pi\{(x+\Delta x)^2 - x^2\}f(x)$$
$$=\pi\{2x\Delta x+(\Delta x)^2\}f(x)$$
$$\therefore \quad \Delta V \fallingdotseq 2\pi x f(x)\Delta x \qquad \cdots\cdots ①$$

①の誤差は Δx より高位の微小量である．

よって，$\dfrac{dV}{dx}=2\pi x f(x)$

$$\therefore \quad V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

(ロ)　F は左図の斜線部である．よって V は

領域 $0 \leqq x \leqq \pi$ かつ $0 \leqq y \leqq \sin x$ を y 軸のまわりに回転した立体の体積なので，(イ)の公式より，

$$V=\int_0^\pi 2\pi x f(x)dx=2\pi\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

部分積分すると，

$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^\pi x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^\pi=\pi \qquad \therefore \quad V=\boldsymbol{2\pi^2}$$

注意　(イ)の公式を用いずに(ロ)を求めるには，弧OA，ABに対する x を x_-，x_+ として，

$V=\pi\int_0^1 (x_+{}^2-x_-{}^2)dy=\pi\int_0^1 x_+{}^2dy-\pi\int_0^1 x_-{}^2dy$ とし，y から x に置換して……とすることになる．

B. 517

曲線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ での法線（Pを通りPでの接線に垂直な直線）と y 軸との交点をQとする．ただし，$t>0$ とする．

(1)　線分PQ，y 軸，$y=x^2$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　xy 平面の上側に，PQを1辺とし高さが t の関数 $f(t)$ で xy 平面に垂直な長方形を作る．Pが点 $(1,\ 1)$ から点 $(2,\ 4)$ まで動くとき，上記の長方形が通過する部分の体積 V を積分で表せ．

(3)　上の(2)において，$f(t)=1/t$ として V を求めよ．

アプローチ　(2)は意外に手強（てごわ）い問題です．

解答　$y=x^2$ より $y'=2x$ だからPでの法線は，

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)\quad\therefore\quad y=-\frac{x}{2t}+t^2+\frac{1}{2}$$

(1)　$S(t)$ は右図の斜線部の面積であるから，

$S(t)=$(台形PQOR)$-$(図形POR)

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}t\left\{t^2+\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\right\}-\int_0^t x^2dx=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t}$$

(2)　$y=x^2$ の点 $\mathrm{P}'(t+\Delta t,\ (t+\Delta t)^2)$ における法線が y 軸と交わる点を Q' とし，2線分PQ，$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ と y 軸および $y=x^2$ とで囲まれた微小部分の面積を ΔS とする．

また，PQ，$\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ をそれぞれ含み xy 平面に垂直な2平面にはさまれたこの立体の微小部分の体積を ΔV とする．

Δt より高位の微小量を無視すれば，

$\Delta V\fallingdotseq f(t)\Delta S$ より $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}\fallingdotseq f(t)\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dt}=f(t)\frac{dS}{dt}=f(t)\left(2t^2+\frac{1}{4}\right)$$

◀ (1)を利用

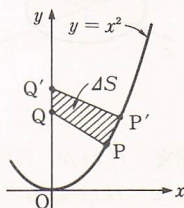
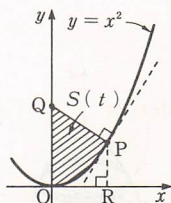
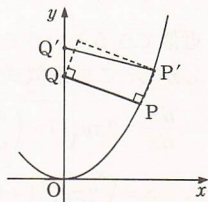
t は1から2まで変化するので，求める体積 V は，

$$V=\boldsymbol{\int_1^2\left(2t^2+\frac{1}{4}\right)f(t)dt}$$

(3)　上の(2)の結果に $f(t)=\dfrac{1}{t}$ を代入して，

$$V=\int_1^2\left(2t^2+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{t}dt=\int_1^2\left(2t+\frac{1}{4t}\right)dt$$

$$=\left[t^2+\frac{1}{4}\log t\right]_1^2=\boldsymbol{3+\frac{1}{4}\log 2}$$

注意　ここでは，無視される誤差が，“Δt より高位の微小量”であることが本質的！　ΔS をPQ，PP' を隣りあう2辺とする長方形で近似とするのは誤差が大きすぎてダメ！

B. 518

xyz 空間において，xz 平面上の曲線 $C：z=1-x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を z 軸のまわりに回転してできる曲面を S とする．S の面積 A を求めよ．

ただし，曲線 C の x 軸上の区間 $[x,\ x+dx]$ に対応する長さ ds の弧を回転してできる微小曲面の面積 dA は $2\pi\,xds$ である．

アプローチ 曲面の面積は，指導要領の範囲外ですが，基本的な考え方は，平面の面積や空間の体積を求めたときと似たようなものです．

解答 x 軸上の区間 $[x,\ x+dx]$ に対応する弧の長さ ds は

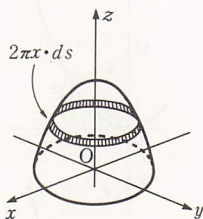
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dz)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

であるから，

$$dA=2\pi x\sqrt{1+(-2x)^2}\,dx$$

$$\therefore\quad A=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{3}\times\sqrt{(1+4x^2)^3}\times\frac{1}{8}\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}$$

研究 $f(x)$ が，区間 $[a,\ b]$ で $f(x)\geqq 0$ で，$f(x)$ は連続であるとするとき，xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ の $a\leqq x\leqq b$ の部分を x 軸のまわりに回転して得られる回転曲面の面積 S が

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられることが，上の議論から出てくる．

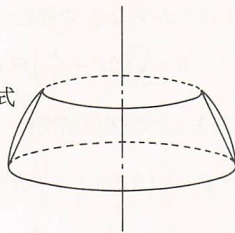
この公式の根拠をひと言でいえば，母線の弧長が Δs，上底の半径が y，高さが Δx の直円すい台の側面積 ΔS が（Δx が微小のときは）

$$\Delta S\fallingdotseq 2\pi y\cdot\Delta s\fallingdotseq 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\Delta x$$

と近似できるということである．

しかし，この近似式から，$\Delta x\to 0$ のときの極限についての等式

$$\frac{dS}{dx}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\therefore\quad S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

を厳密に導くためには，近似の誤差が Δx より高位の無限小であることを証明しなければならない．ただし，この種の議論は高校の範囲を越えた知識とセンスを必要とする．

B. 519

z 軸を軸とする半径 2 の円柱の側面で，xy 平面より上 (z 軸の正の方向) にあり，かつ，平面 $x-\sqrt{3}\,y+z=2$ より下 (z 軸の負の方向) にある部分をDとする．Dの面積 S を求めよ．

アプローチ 「長さを積分すれば面積，面積を積分すれば体積」という素朴な信仰が，実は誤解であることを明らかにする問題です．

解答 平面 $x-\sqrt{3}\,y+z=2$ ………① と xy 平面との交線は①に $z=0$ を代入して得られる方程式 $x-\sqrt{3}\,y=2$ ………② の表す直線である．一方，円柱と xy 平面との交わりは，$x^2+y^2=4$……③ の表す円である．xy 平面上の②と円③は右図のように，2 点 A(2, 0, 0), B(-1, $-\sqrt{3}$, 0) で交わる．この 2 点を結ぶ優弧 AB 上に点Pをとり，P から xy 平面に垂直にたてた直線と平面①との交点をQとおき，

$\angle \mathrm{AOP}=\theta$ とおくと，P$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$

$\therefore\quad \mathrm{PQ}=2-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

となり，θ が微小角 $\varDelta\theta$ だけ増えるときの側面積 S の微小増分 $\varDelta S$ は，底辺$=2\varDelta\theta$，高さ$=\mathrm{PQ}$ の長方形の面積で近似できる．すなわち，

$$\varDelta S \fallingdotseq 2\varDelta\theta\times(2-2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)\qquad\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\therefore\quad \frac{dS}{d\theta}=4(1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$$

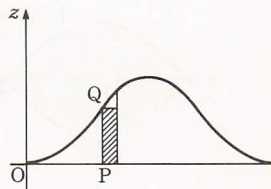
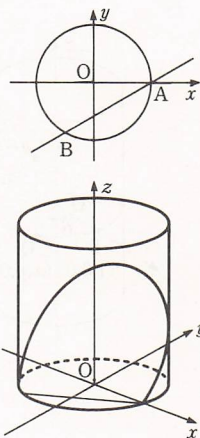
一方，P$=$A のとき $\theta=0$．P$=$B のとき $\theta=4\pi/3$ である．

$$\therefore\quad S=\int_0^{4\pi/3}4(1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\,d\theta$$

$$=4\Big[\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\Big]_0^{4\pi/3}$$

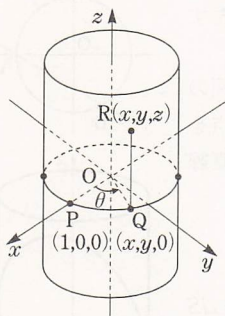
$$=4\left\{\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\right\}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi+8\sqrt{3}}$$

参考 曲面の面積の一般論は高校数学の範囲以外であるが，円柱や円すいの側面のように展開図が作れるものについては，小学校以来，馴じんでいるはずである．本問において本質的役割を果たす (＊) も右図のような展開図を考えれば，より納得がいくであろう．

注意 「長さを積分すれば面積」と信じていている諸君もいるが，PQ を $\angle\mathrm{AOP}=\theta$ で積分しても，正しい結果は得られない！

B.520

xyz 空間において円柱 $C=\{(x,\ y,\ z),\ x^2+y^2=1\}$ を考える.

(1) C 上の点 $P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(x,\ y,\ 0)$, $R(x,\ y,\ z)$ (ただし $z\geqq 0$) を考える. $\overline{PR}=2$ のとき. z を $\theta=\angle POQ$ の関数で表せ. ただし, O は原点とする.

(2) 中心 (1, 0, 0), 半径2の球 S の内部にある C の部分の面積 S を求めよ.

解答 (1) $\angle POQ=\theta$, $OQ=1$ より,

$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

したがって, $R(\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$

ところで, $PR=2$ であるから,

$(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta+z^2=4$

$\therefore\quad z^2=2+2\cos\theta$

$\qquad =4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore\quad z\geqq 0$ より　　$\boldsymbol{z=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}$

(2) 円柱の直径が2であるので θ を $[-\pi,\ \pi]$ の範囲で動かしたときにRが描く曲線と, それを xy 平面に関して対称に移動した曲線でかこまれた C の部分の面積を求めればよい.

$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$, $z\geqq 0$ のとき,

弧PQ, 線分QRの長さを, それぞれ X, Y とおけば,

$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ より ▶ $2\cos\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$

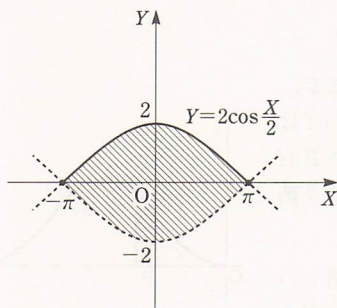
$$\begin{cases} X=\theta \\ Y=\left|2\cos\dfrac{\theta}{2}\right|=2\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}\quad \text{より}\quad Y=2\cos\frac{X}{2}$$

したがって, C を直線 $x=-1$, $y=0$ で切り, 平面に展開すると, Rの描く曲線は左図のようになる.

xy 平面に関する対称性を考えて, 求める面積 S は,

$$S=2\int_{-\pi}^{\pi}2\cos\frac{X}{2}dX$$

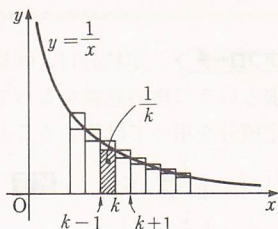
$$=2\left[4\sin\frac{X}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\mathbf{16}$$

B.521

$\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\log n$ を証明せよ．

アプローチ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ を n の簡単な式で表すことはできない．そこで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ が計算できるような適当な a_k，b_k で

$$a_k<\frac{1}{k}<b_k$$

と評価しようと考える．

解答 $y=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ で単調に減少するから，k を2以上の整数とすると，

$k-1<x<k$ において $\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k-1}$

各辺を $x=k-1$ から $x=k$ まで積分して

$$\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k-1}\qquad(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

$$\therefore\ \begin{cases}\dfrac{1}{k}<\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} & \cdots\cdots①\ (k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)\\ \dfrac{1}{k}>\displaystyle\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x} & \cdots\cdots②\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\end{cases}$$

を得る．

①を $k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ について加えあわせ，さらに1を足すと

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}=1+\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}$$
$$=1+\Big[\log|x|\Big]_{1}^{n}$$
$$=1+\log n\qquad\cdots\cdots①'$$

また②を，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について加えあわせると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}$$
$$=\Big[\log|x|\Big]_{1}^{n+1}$$
$$=\log(n+1)\qquad\cdots\cdots②'$$

①′，②′をあわせたものが証明すべき不等式である．■

注意 ①′を導く際，①を $k=1$ から加えあわせなかったのは，$k=1$ の場合には，①の右辺が発散してしまい，評価式として役に立たないからである．

B. 522

つぎの値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$　　　(2) $\displaystyle\log_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$

アプローチ 定積分は，(a)原始関数（不定積分）の値の差，(b)区分求積的なリーマン和の極限という二重の意義をもっている．この二重性を利用すると，ある種の級数和の極限を，定積分を用いて計算することができる．

解答 （1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

▷ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ とおけば $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

▷ 定積分の計算は省略した ☞B. 409

（2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2}{2n}k}$

▷ $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおけば $\dfrac{2}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}g\left(\frac{2k}{2n}\right)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^2=\mathbf{\log 3}$$

研究 区間 $[a,\ b]$ を n 個に分割して，各小区間における右端の値を代表値に選ぶと，

$$\frac{b-a}{n}\times\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

左端の値を代表値に選ぶと

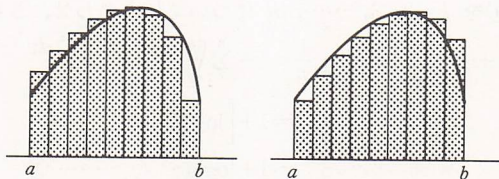
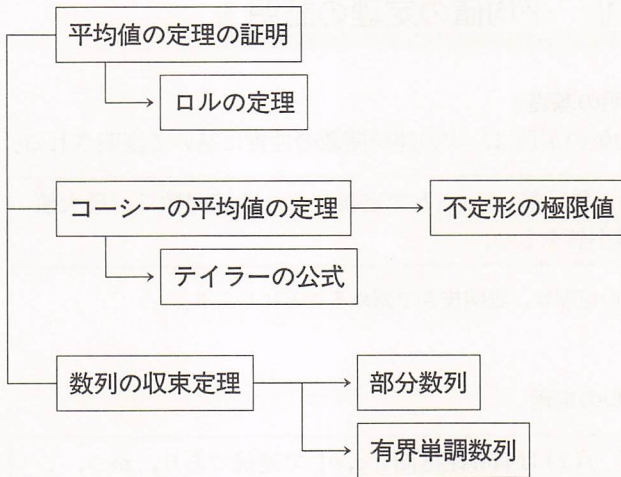
$$\frac{b-a}{n}\times\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

で近似和が与えられる．したがって，$f(x)$ が積分可能（A 4.5）であるときには，$n\to\infty$ のとき，いずれも $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に収束する．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ や $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$ のように，

項が1つくらいふえても足りなくても，極限値には影響しない（どのみち，$\dfrac{1}{n}$ をかける！）

しかし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}$ となると話は変わる．増える項の個数が n とともに無限大になるからである．

上の(2)がこれに相当する．ここでは，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ について，区間〔0, 2〕を $2n$ 等分したときのリーマン和の極限と見なして極限値を求めている．

この章では，平均値の定理の証明とその応用，さらに数列の収束などについての進んだ考察を紹介する．これらの考察は，高校教育の域を超えるが，(問題解決における)実用的な効用もなくはない．なお，これ以上の体系的な解説は，大学レベルの専門書，あるいは，本格的な大学の講義の受け持ちである．

A 6. 1　平均値の定理の証明

I．　証明の基礎

平均値の定理は，次の連続関数の性質に基いて証明される．

> [定理]　閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された連続関数は，最大値と最小値をもつ．

1°　この定理は，証明抜きで認めることにしよう．

II．　ロルの定理

> [定理]　$f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続であり，かつ，この区間の内部，すなわち，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．このとき，もし，
>
> $$f(a)=f(b)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$
>
> であるならば，開区間 (a, b) のある点 x_0 において
>
> $$f'(x_0)=0$$
>
> となる．

ロルの定理　[Rolle's theorem]

証明：　$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続であるから，この区間における $f(x)$ の最大値 M，最小値 m が存在する．

M，m について，次の 2 つの場合に分けて証明する．

場合 I．$M=m=0$

場合 II，M，m の少なくとも一方が 0 でないとき，

場合 I については，実は $f(x)\equiv 0$ $(x \in [a,\ b])$ である．したがって，定理の x_0 としては $a < x_0 < b$ をみたすどの x_0 を採用してもよい．

場合IIについては，まず $M>0$ の場合を調べよう．

最大値 M に到達する点を x_0 とする．すなわち

$$f(x_0)=M \quad かつ \quad a<x_0<b$$

このとき $f'(x_0)=0$ を示そう．

いま，h を十分0に近い数とすると，M が最大値であることから

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-M\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ，よって，$h>0$ のときには，

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

が成り立つ．③で $h\to +0$ ならしめると（極限値が存在するという仮定のもとでは，片側極限値もそれと一致するので），

$$f'(x_0)\leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

が得られる．また，$h<0$ の場合には，②から

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑤$$

となり，ここで $h\to -0$ ならしめると

$$f'(x_0)\geqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑥$$

が得られる，④，⑥がともに成り立つことから

$$f'(x_0)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑦$$

もしも，$M=0$ ならば，$m<0$ であるから，最小値 m に達する点を x_0 として，上と同様の論法を不等号の向きを然るべく修正しながら適用すれば，やはり⑦を示すことができる．

III.　平均値の定理

> **[定理]**　$f(x)$ は $[a,\ b]$ で連続であり，$(a,\ b)$ で微分可能であるとする．このとき
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0),\quad a<x_0<b$$
>
> をみたす x_0 が存在する．

平均値の定理 [the mean value theorem]

証明：　補助的に関数

$$F(x)=f(x)-f(a)-m(x-a) \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．ただし，

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \cdots\cdots ②$$

とする，F の連続性と微分可能性は f のそれを受けついでいる．また，

$$F(a)=f(a)-f(a)-m(a-a)=0$$
$$F(b)=f(b)-f(a)-m(b-a)$$
$$=f(b)-f(a)-\{f(b)-f(a)\}=0$$

したがって，ロルの定理より

$$F'(x_0)=0,\ a<x_0<b \qquad \cdots\cdots ③$$

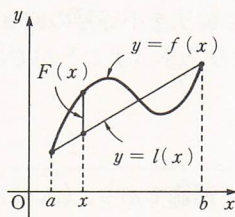
をみたす x_0 が存在する．ところが

$$F'(x)=f'(x)-m$$

であるから，③は定理の結論を意味している．

1°　$f(x)$ のグラフ上の2点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を結ぶ直線の方程式を $y=l(x)$ とすると，上に現れた $F(x)$ は

$$F(x)=f(x)-l(x)$$

になっている．

A 6.2 コーシーの平均値の定理

I．コーシーの平均値の定理

次頁の不定形の極限値のように，進んだ応用を述べるため，平均値の定理のひとつの一般化を準備する．

> [定理]　$f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続であり，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．さらに，(a, b) のどの点においても $f'(x)$，$g'(x)$ が同時に 0 になることはないものとする．このとき，$g(a) \neq g(b)$ ならば
>
> $$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \quad a < x_0 < b \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
>
> をみたす x_0 が存在する．

コーシー［Cauchy］の平均値の定理

1°　**証明**　$p = f(b) - f(a)$，$q = g(b) - g(a)$ とおく．仮定により $q \neq 0$ である．さらに，つぎの補助関数を導入する．

$$F(x) = q(f(x) - f(a)) - p(g(x) - g(a)) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

このとき，

$$F(a) = q(f(a) - f(a)) - p(g(a) - g(a)) = 0$$

$$F(b) = q(f(b) - f(a)) - p(g(b) - g(a)) = qp - pq = 0$$

である．したがって，ロルの定理より

$$F'(x_0) = 0, \quad a < x_0 < b \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

をみたす x_0 が存在する．ここで，

$$F'(x) = qf'(x) - pg'(x)$$

に注意すると，$F'(x_0) = 0$ から

$$qf'(x_0) = pg'(x_0) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

ところが，もしも $g'(x_0) = 0$ とするならば $q \neq 0$ と④より $f'(x_0) = 0$ となるので，f'，g' が x_0 で同時に 0 となり，これは仮定に反する．したがって

$$g'(x_0) \neq 0$$

よって，④から

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{p}{q} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

が得られる．

2°　ふつうの平均値の定理は，この定理で $g(x)\equiv x$ とした場合である．

II．不定形の極限値

コーシーの平均値の定理を応用しよう．さて

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \text{ かつ } \lim_{x\to a}g(x)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

のとき，極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は，“$\dfrac{0}{0}$ の不定形”であるという．

[定理]　$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形とする．

$f(x)$，$g(x)$ は $x=a$ の近くで($x=a$ を別とすれば)微分可能であり，$g(x)$ と $g'(x)$ は 0 にならないとする．このとき，

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

が存在するならば，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して m と一致する．

すなわち，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ．

ロピタルの公式 [l'Hospital's formula]

1°　**証明**：　微分可能ならば，連続であるから，⑤より

$$f(a)=0,\ g(a)=0$$

よって，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

と書いてよい．ここで，たとえば，$x>a$ ならば，前頁Ⅰのコーシーの平均値の定理において，b の代わりに x が用いられているものとみなし，x_0 の代わりに ξ と書けば，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ (\xi \text{ は } a \text{ と } x \text{ との間にある値}) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

がおのおのの x に対して成立する．

$x<a$ のときにも，⑨の結論は変わらない．

ξ は x によるが，$x \to a$ のとき，$\xi \to a$ となることは確かである．よって，⑨と仮定⑧から

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=m$$

が得られる．

2° 例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩から⑪へ移るときにもロピタルの公式を使いたくなるが，⑩の形の極限値は $\sin x$ の微分公式を導くのに使うので，論理が循環する．

A6.3 テイラーの公式

I．近似式

接線は，接点の近くで曲線を良く近似する．すなわち，x が a に近いとき

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

という近似式が成立する．それでは，この近似の誤差はどれほどか．また，$f(x)$ をもっと次数の高い多項式で近似するにはどうするか．この問に一般的な形で，かつ，精密に答えるのが，つぎのテイラーの公式である．

II. テイラーの公式

[定理]　$f(x)$ はある区間 I で n 回微分可能な関数であるとする．a を I に属する1つの点とする．このとき，I に属する任意の x に対して，x と a との間にある適当な点 ξ をえらべば

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \quad\cdots\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

テイラーの公式［Taylor's formula］

1°　証明に先立ち，定理の意味をさとってもらうための注意をいくつか述べよう．

まず $n=1$ のときには，定理の主張は

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a),\ (\xi \text{ は } x \text{ と } a \text{ の間})$$

をみたす ξ が存在するということで，これはふつうの平均値の定理にほかならない．$n=2$ のときには，定理の主張は

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,\ (\xi \text{ は } x \text{ と } a \text{ との間})$$

という ξ の存在である．

よって，もし，ある定数 M に対して

$$|f''(x)|\leqq M$$

が成り立つ範囲で考えているのであれば

$$|f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}|\leqq\frac{M}{2!}(x-a)^2 \quad\cdots\cdots\cdots②$$

が成立することになる．これは1次近似の誤差が $(x-a)^2$ の程度であることを示している．

2°　①を“$f(x)$ を表すテイラーの公式”といい，最後の項 $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$ を，その剰余項という．

3°　例　$f(x)=\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x$$

であるから，

$$f(x)=\sin x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\text{剰余項}$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\text{剰余項}$$

ここで剰余項の大きさは，$\dfrac{x^4}{4!}$ を越えない．

4°　視覚の負担を軽くするために，$n=3$ の場合について証明を記す．（かえって分かりにくいと思われる読者は一般の n の場合に修正して書いてみるとよい．）

$$F(x)=f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

とおく．

$$F(a)=0,\ F'(a)=0.\ F''(a)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

はすぐ確かめられる．また，

$$G(x)=(x-a)^3 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

とおけば，

$$G(a)=0,\ G'(a)=0.\ G''(a)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

は，すぐわかる．さて，

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$$

の右辺を考えると，A6.2で述べたコーシーの平均値の定理により

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

となるような ξ_1 が x と a の間に存在する．同様にして，

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \quad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

となるような ξ_2 が ξ_1 と a との間に存在することになる．よって⑦，⑧から

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}=\frac{f''(\xi_2)-f''(a)}{6(\xi_2-a)} \quad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

が成立する．さらに，$f''(x)$ にふつうの平均値の定理を適用すると

$$\frac{f''(\xi_2)-f''(a)}{\xi_2-a}=f'''(\xi)$$

となる ξ が a と ξ_2 との間に存在する．よって，⑨から

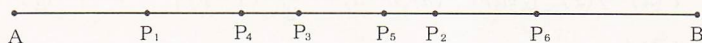
$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{1}{6}f'''(\xi),\ \text{すなわち}\ F(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3 \cdots\cdots ⑩$$

となる ξ が a と ξ_2 との間に，（したがって，a と x との間に）存在することになる．

⑩は，テイラーの公式の $n=3$ の場合を与えている．

A6.4　数列の収束定理

I．部分数列の収束

長さ1の線分ABの上に，好きなように次々と点をとって見よう．

数限りなくP_1，P_2，P_3，……をとって行くと，なるべく点どうしが近づかないように注意していても，どうしても点が密集した部分ができてしまう．

ある点Xのまわりに点が密集していて，Xのどんなに近くをみても無数の点が存在するとき，Xを集積点という．

点列P_1，P_2，P_3，……は，2個以上の集積点をもつかも知れないので，そのうちの一つに注目し，Xとおく，このとき，P_1，P_2，P_3，……の中から適当に点を選んで，Xに限りなく近づく(収束する)ようにできるだろう．

ここでひとつ，言葉の準備をする．

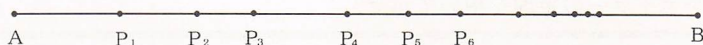
部分数列

> **[定義]**　数列a_1，a_2，……，a_n，……から無限個の項をとり出して，もとの数列のときと同じ順序で並べて得られる数列をもとの数列の**部分数列**という．

1°　例　偶数ばかりを並べた数列2，4，6，……は，すべての自然数を並べた数列1，2，3，……の1つの部分数列である．
部分数列という言葉を用いると，上に述べたことは次のように表現できる．

> **[定理]**　(無限)数列$\{x_n\}$が閉区間$a \leqq x \leqq b$に含まれる($a \leqq x_n \leqq b$)とき，$\{x_n\}$は少なくとも1つの集積点をもち，したがって，$\{x_n\}$から収束する部分数列を選び出すことができる．

II.　有界単調数列の収束

次に，長さ1の線分AB上に，左から右に向かって好きなように点をとってみよう．

数限りなく点P_1，P_2，P_3，…… をとって行くと，今度は必ずある1つの点（Bとは限らない）に近づくことになる．

数列$\{a_n\}$に対し

$$L \leqq a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ定数Lが存在するとき，$\{a_n\}$は**下に有界** [bounded from below] であるといい，

$$a_n \leqq M \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ定数Mが存在するとき，$\{a_n\}$は**上に有界** [bounded from above] であるという．

また，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \cdots\cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots\cdots$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$は**増加数列**，

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots\cdots$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$は**減少数列**という．

増加数列，減少数列を一括して**単調数列**という．これらの言葉を用いると，上に述べたことは次のように表現できる．

> **[定理]**　（無限）数列$\{a_n\}$が増加数列であり，かつ，上に有界ならば，$\{a_n\}$は収束する．また，$\{a_n\}$が減少数列であり，かつ，下に有界ならば，$\{a_n\}$は収束する．
> いいかえれば，有界かつ単調な数列は収束する．

有界単調数列の収束定理

1°　この定理は，前頁Iに述べた定理を用いると証明することができるが，本書ではふれない．

2°　応用は ☞A2.5VII 自然対数の底（p62）

—— A6　おわり ——

B.601

$f(x)$ が 2 回微分可能で，かつ $f''(x)$ が連続であるならば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

が成り立つことをテイラーの定理を用いて示せ．

アプローチ テイラーの定理を使うと簡単に証明できる．

解答 任意の $h\neq 0$ に対して

$$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a+\theta_1 h)}{2}h^2 \\ f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\dfrac{f''(a-\theta_2 h)}{2}h^2 \end{cases}$$

となる θ_1，θ_2 $(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1)$ が存在するので

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\frac{1}{2}\{f''(a+\theta_1 h)+f''(a-\theta_2 h)\} \quad \cdots\cdots ①$$

と表される．

ここで，$h\to 0$ とすると

$$a+\theta_1 h\to a,\ a-\theta_2 h\to a$$

であり，$f''(x)$ は連続であったから，①の右辺は $f''(a)$ に収束する．

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a) \quad \cdots\cdots(*)$$

■

[注] $f''(x)$ が存在しないときでも (∗) の左辺の極限は定義できることがある．たとえば

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

とすると，$f''(0)$ は存在しない ($f'(x)$ が $x=0$ で不連続！ ☞B.230) が，(∗) の左辺は 0 になる．一方，$f''(a)$ が存在するときは (本問では，$f''(x)$ の連続性も仮定したが実は不要な仮定である) (∗) が成り立つ．したがって，(∗) の左辺は，2 階の微分係数の概念を拡張したものと考えられる．

B. 602

$$f_n(x)=e^x-\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \quad (x\geqq 0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおくとき，$0\leqq f_n(x)\leqq e^x\dfrac{x^n}{n!}$……(＊)（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）

が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

アプローチ 関数 $F(x)=e^x$ に対してテイラーの定理を用いれば，$f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{\theta x}$ $(0<\theta<1)$ と表せるので，証明すべき結論は明らかであるが，ここでは，そのような高級な定理に訴えずに結論を導こうとしているわけである．

解答 $g_n(x)=e^x\dfrac{x^n}{n!}-f_n(x)$

とおく．

まず $n=1$ のとき

$f_1(x)=e^x-1\geqq 0$（∵ $x\geqq 0$ なら $e^x\geqq 1$）

また，

$g_1'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x-e^x=xe^x\geqq 0,\ g_1(0)=0$　　◀ $g_1(x)=xe^x-e^x+1$

より，$g_1(x)\geqq 0$ である．

よって，$n=1$ のとき(＊)が成り立つ．

そこで，任意のある自然数 k に対して，$n=k$ のとき(＊)が成り立つとする．すなわち

$$f_k(x)\geqq 0 \text{ かつ } g_k(x)\geqq 0$$

が成り立つとする．

$$f_{k+1}(x)=e^x-\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right\}$$

$$\therefore \begin{cases} f'_{k+1}(x)=e^x-\left\{1+\dfrac{x}{1!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right\}=f_k(x)\geqq 0 \\ f_{k+1}(0)=0 \end{cases}$$

より，$f_{k+1}(x)\geqq 0$．一方，

$$g_{k+1}(x)=e^x\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-f_{k+1}(x)$$

$$\begin{cases} g'_{k+1}(x)=e^x\cdot\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}+e^x\dfrac{x^k}{k!}-f_k(x)=e^x\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}+g_k(x)\geqq 0 \\ g_{k+1}(0)=-f_{k+1}(0)=0 \end{cases}$$

より，$g_{k+1}(x)\geqq 0$

すなわち，$n=k+1$ のときも(＊)が成り立つ．■

B. 603

関数 $f(x)$ において，$f''(x)$ は連続であるとして，

$$E=f(a+h)-f(a)-hf'(a)\ [h\neq 0]$$ とおく．

(1) $E=\int_0^h (h-t)f''(a+t)dt$ が成り立つことを示せ．

(2) $|f''(x)|\leqq M$ (M は正の定数) ならば，$|E|\leqq\frac{1}{2}Mh^2$ が成り立つ．$h>0$ の場合についてこれを示せ．

アプローチ これは，近似式 $f(a+h)\fallingdotseq f(a)+hf'(a)$ の誤差を評価する問題である．☞ A 3.5

解答 (1) 部分積分法を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}&\int_0^h (h-t)f''(a+t)dt\\&=\Big[(h-t)f'(a+t)\Big]_0^h-\int_0^h (h-t)'f'(a+t)dt\\&=-hf'(a)+\int_0^h f'(a+t)dt\\&=-hf'(a)+\Big[f(a+t)\Big]_0^h\\&=-hf'(a)+f(a+h)-f(a)=E\end{aligned}$$

(2) $0\leqq t\leqq h$ で $h-t\geqq 0$, $|f''(a+t)|\leqq M$

$$\therefore\quad |(h-t)f''(a+t)|\leqq M(h-t)$$

であることを用いると，

$$\begin{aligned}|E|&=\left|\int_0^h (h-t)f''(a+t)dt\right|\\&\leqq\int_0^h |(h-t)f''(a+t)|\,dt\\&\leqq M\int_0^h (h-t)dt=M\Big[ht-\frac{t^2}{2}\Big]_0^h=\frac{1}{2}Mh^2\end{aligned}$$

$a<b$ ならば $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqq\int_a^b |f(x)|\,dx$

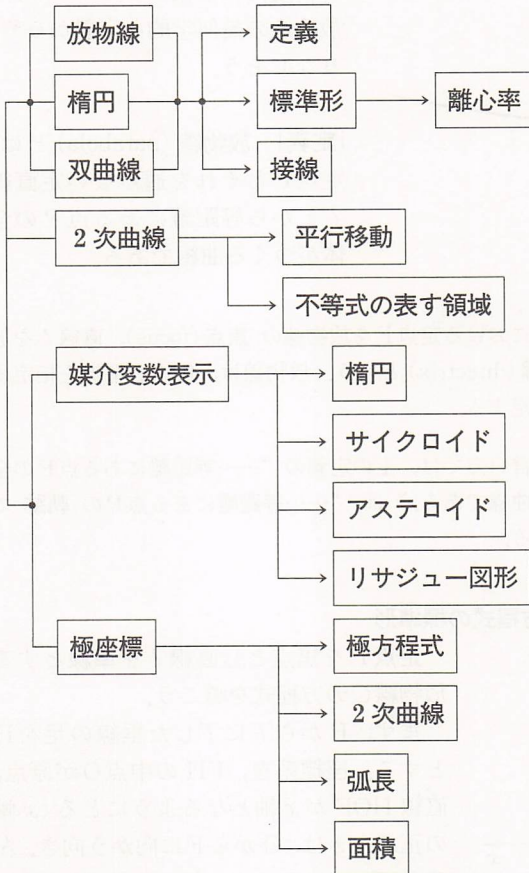
研究 上と同様にして，n 次導関数が連続な関数 $f(x)$ について

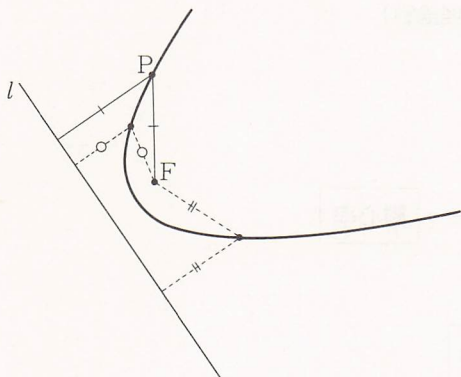
$$f(a+x)=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\frac{f'''(a)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n$$

ただし，$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(a+t)dt$

が成り立つ．この R_n は，適当な x_1 を用いて $\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}x^n$ と表すこともできる．これはテイラーの公式と呼ばれる重要な定理である．☞ A 6.3

§7 いろいろな曲線

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）

A7.1 放物線の方程式

I．定義

2次関数

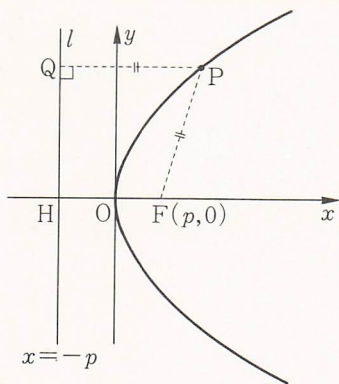
$$y=ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$$

のグラフが放物線であることは，数学Iで学んでいる．ここでは，解析幾何の伝統にしたがって，放物線の幾何学的な定義からやりなおそう．

［**定義**］　**放物線**（parabola）とは，定点Fとそれを通らない定直線lとから等距離にある点Pの全体がつくる曲線である．

1°　上の定義における定点Fを放物線の **焦点**（focus），直線lを放物線の **準線**（directrix）という．放物線は，焦点と準線を指定すれば1つに定まる．

2°　習慣的な言い方では，上の定義の“……等距離にある点Pの全体がつくる曲線である．”は，“……等距離にある点Pの **軌跡** である”となる．

II．放物線の方程式の標準形

定点Fを焦点とし直線lを準線とする放物線Cの方程式を導こう．

まず，Fからlに下した垂線の足をHとする．座標系を，FHの中点Oが原点，直線HOFがx軸となるようにとる（x軸の正の向きは，OからFに向かう向き．左図参照）．このとき，y軸はOを通り準線と平行である．また，焦点と準線との距離の半分をpとおく．すると，

焦点Fの座標；F(p, 0)

準線lの方程式；$x=-p$．

さて，任意の点 $P(x,\ y)$ が放物線Cに属するための条件は，Pからlに引いた垂線をPQとして，PF＝PQ である．すなわち，

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p| \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

①は，その両辺を2乗して得られる

$$(x-p)^2+y^2=|x+p|^2$$

と同値である．

ところが，

$$|x+p|^2=(x+p)^2$$

であるから

$$y^2=(x+p)^2-(x-p)^2=4px$$

よって，

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

②が放物線Cの方程式である．

1°　上の②を放物線の方程式の **標準形** という．この放物線の **頂点** は原点であり，その対称軸(あるいは単に **軸**)はx軸である．

2°　念を押すと，方程式②の表す曲線は放物線で，その焦点は点$(p,\ 0)$，準線は $x=-p$ である．

実は，このことは $p<0$ でも成り立つ．

例　$y^2=-4x$ の表す曲線は，放物線であり，その焦点は点$(-1,\ 0)$，準線は $x=1$ である．

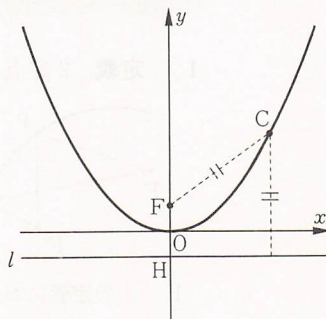
3°　焦点Fが$F(0,\ p)$で表され，かつ，準線lの方程式が $y=-p$ となるように座標をとれば，放物線Cの方程式は

$$x^2=4py \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

すなわち，

$$y=\frac{1}{4p}x^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

となる．

例　2次関数 $y=x^2$ のグラフは，④で $p=\frac{1}{4}$ としたものである．したがって，その焦点は，点$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，準線は直線 $y=-\frac{1}{4}$ である．

III. 接　線

放物線の方程式②の両辺を x で微分すると（☞ A 2.9）

$$2y\frac{dy}{dx}=4p \qquad \therefore \quad y\frac{dy}{dx}=2p.$$

よって，放物線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の傾きを m とすれば，$y_1 \neq 0$ のとき

$$y_1m=2p \qquad \therefore \quad m=\frac{2p}{y_1}$$

したがって，接線の方程式は

$$y=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1,\ \text{すなわち}\ \ y_1y=2px-2px_1+y_1^2$$

となるが，さらに $y_1^2=4px_1$ を用いて

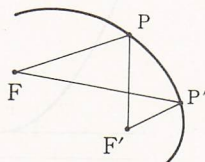
$$y_1y=2p(x+x_1)$$

となる．なお，この接線の公式は $y_1=0$ のときも成立する．

放物線の接線

> 放物線 $y^2=4px$ の，点 (x_1, y_1) における接線は
>
> $$y_1y=2p(x+x_1)$$
>
> で与えられる．

A 7.2 楕　円

I．定義　2定点F，F′からの距離の和

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}$$

が一定 l である点Pの全体がつくる曲線を**楕円** (ellipse) という．ただし，$l>\mathrm{FF'}$ とする．

1°　上の定義におけるF，F′を，その楕円の**焦点**という．

2°　F，F′を焦点とし，2焦点からの距離の和が l である楕円は，
$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=l$
という条件を満たす点Pの軌跡とも考えられる．

II.　楕円の方程式の標準形

F，F′ を焦点とし，条件 PF＋PF′＝l の定める楕円Cの方程式を導こう．

$$a=\frac{l}{2},\quad c=\frac{\mathrm{FF}'}{2}$$

とおき，かつ，F(c，0)，F′($-c$，0) となるように座標軸をとる．ただし，$l>\mathrm{FF}'$ より $a>c>0$ である．

C上の任意の点を P(x，y) とすれば，

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

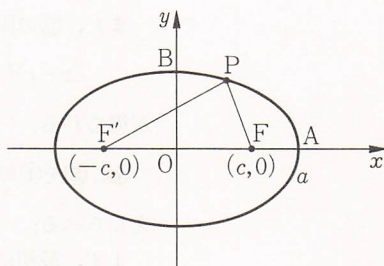
$$\mathrm{PF}'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

よって，x，y の満足すべき条件は

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \cdots ①$$

下に示すように，①をうまく同値変形すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．これを，楕円の方程式の **標準形** という．

1°# ①から②への同値変形（初読の際はとばしてよい）．

①の両辺に $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ を掛けると

$$(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=2a(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2})$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{4cx}{2a}=2\frac{cx}{a} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

①＋③ をつくり，両辺を 2 で割れば

$$\therefore\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

両辺を平方して

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$\therefore\quad x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\therefore\quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

よって，$b=\sqrt{a^2-c^2}$ とおけば

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

こうして，① $\Longrightarrow$ ② が得られた．

逆に，② $\Longrightarrow$ ① を示そう．まず，

② $\Longrightarrow$ ⑥ $\Longrightarrow$ ⑤

は容易にわかる．

⑤の両辺に $2cx$ を加えてみると

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が得られる．

また，⑤の両辺から $2cx$ を引けば，

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

が得られる．

⑦，⑧を①の根号の中に代入する前に $a+\dfrac{cx}{a}$，$a-\dfrac{cx}{a}$ の符号をしらべる．

まず，最初に注意したように，

$$a=\frac{l}{2}>\frac{\mathrm{FF}'}{2}=c$$

である．

さて，実数 x，y が②を満足するとすれば

$$\frac{x^2}{a^2}\leqq 1, \qquad \therefore \quad \left|\frac{x}{a}\right|\leqq 1$$

$$\therefore \quad \left|\frac{cx}{a}\right|=c\left|\frac{x}{a}\right|\leqq c<a$$

これより

$$a+\frac{cx}{a}>0,\ \ a-\frac{cx}{a}>0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑨を考慮すれば⑦，⑧から，それぞれ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a},\ \ \sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{cx}{a}$$

この 2 等式を辺々加えて①が得られる．

結局，② $\Longrightarrow$ ① が示された．

2°　$\mathrm{F}=\mathrm{F}'$ の場合には，$c=0$，したがって $b=a$ であり，②は

$$x^2+y^2=a^2$$

となり，原点を中心とする円を表す．

3°　以下，とくに断らなくても，楕円の方程式の標準形②では，$a>0$，$b>0$ であるものとする．

②においては，$a>b>0$ のとき，焦点は

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

であり，これらは，x 軸上にある．

このとき，$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

を，楕円②の離心率という．離心率を用いれば，焦点の座標は

$$\mathrm{F}(ae,\ 0),\ \mathrm{F}'(-ae,\ 0)$$

と表せる．

さらに，②と x 軸との交点 A，A′，および，y 軸との交点 B，B′ を，楕円の **頂点** という．

A$(a,\ 0)$，A′$(-a,\ 0)$，AA′$=2a$

B$(0,\ b)$，B′$(0,\ -b)$，BB′$=2b$

$a>b$ により AA′>BB′ であるので，AA′ を **長軸**，BB′ を **短軸** という．

一方，$b>a>0$ のとき，楕円②の焦点は

$$(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ (0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

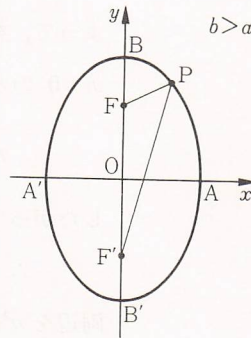
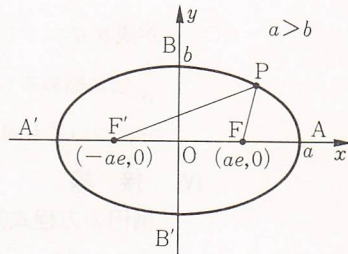
また

長軸＝BB′，短軸＝AA′

と入れかわり，離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$

となる．

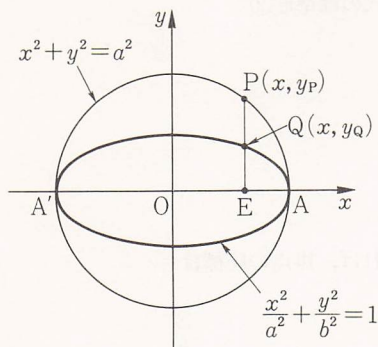
4°　楕円において，2焦点の中点を **中心** という．楕円は中心に関して点対称である．なお，楕円の方程式が②で与えられるとき，中心は原点である．

III. 楕円と円

いま，原点を中心とし，半径 a の円

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

と，楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑪$$

を同時に考える．

いま，x 軸上にある円⑩の直径 AA′ 上に点 E$(x, 0)$ を取り，E を通り y 軸に平行な直線が⑩，⑪の上半分と交わる点それぞれを P，Q とおく．

P の y 座標 y_P は⑩より

$$y_P=\sqrt{a^2-x^2},$$

一方，Q の y 座標 y_Q は，⑪より

$$y_Q=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

したがって，E が AA′ 上のどの点であっても

$$y_Q=\frac{b}{a}y_P$$

が成り立つ，すなわち，楕円⑪の上半分は，円⑩の上半分を高さ $\frac{b}{a}$ 倍に縮める ($b>a$ ならば伸ばす) ことによって得られる．下半分についても同様である．

Ⅳ. 接　線

楕円の方程式⑪の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

よって，楕円上の点 (x_1, y_1) における接線の傾きを m とすれば，$y_1 \neq 0$ のとき $\frac{2x_1}{a^2}+\frac{2y_1}{b^2}m=0$ である．すなわち

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

したがって接線の方程式は $y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$

$$\therefore \quad b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^{\,2}+a^2y_1^{\,2}$$

両辺を a^2b^2 で割り，$\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}=1$ を用いると

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

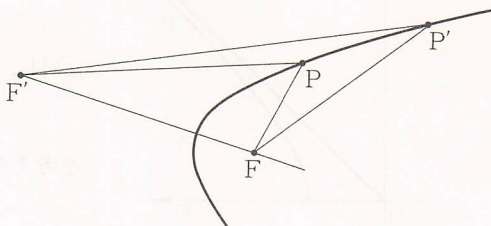
を得る．なおこれは，$y_1=0$ のときも成立する．

楕円の接線

> 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の，点 (x_1, y_1) における接線は
>
> $$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

A7.3 双曲線

I．定　義

2定点F, F′からの距離の差が一定 l である点の軌跡を**双曲線**(hyperbola)という．F, F′を焦点という．ただし，FF′$>l$ とする．

II．双曲線の方程式の標準形

F，F′を焦点とし，条件 $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=l$ の定める双曲線 C の方程式を導こう．

$$a=\frac{l}{2},\quad c=\frac{\mathrm{FF'}}{2}$$

とおき，かつ，F′$(-c,\ 0)$，F$(c,\ 0)$ となるように座標軸をとる．ただし，FF′$>l$ より $c>a$ である．C 上の任意の点をP$(x,\ y)$とおけば，

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\mathrm{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

であるから，PがC上にあるための条件は，

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

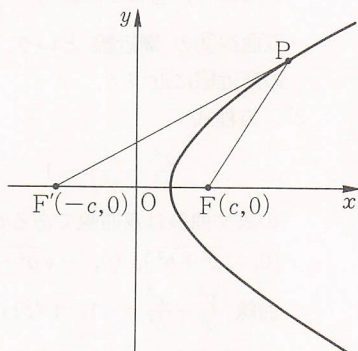
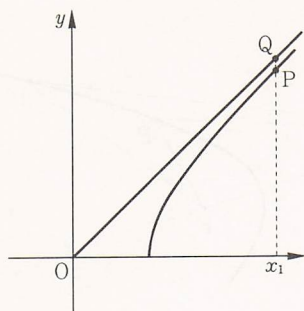
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が導かれる．

②を双曲線の方程式の **標準形** という．

1°　双曲線②の焦点は F$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，F′$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ である．また，

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

をこの双曲線の **離心率** という．離心率を用いれば，②の焦点は F$(ae,\ 0)$，F′$(-ae,\ 0)$ と表される．

また，双曲線②について，2点 $A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$ を頂点という．

2°　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

に対し，方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える．③は

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \text{と変形できる．}$$

すなわち，③は2直線 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ を表す．この2直線を双曲線②の **漸近線** という．遠方にいくにしたがって，双曲線はその漸近線に近づく．

3°　方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (a,\ b>0) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

の表す曲線は双曲線であるが，その焦点は y 軸上の2点
$(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$, $(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$ である．このことは，曲線④が，曲線 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=-1$, すなわち，$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであることからわかる．双曲線④の漸近線は，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ のそれと同じである．

双曲線④を，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の**共役**（きょうやく）**双曲線**ということがある．

4°　漸近線が直交する双曲線を **直角双曲線** という．直角双曲線の共役双曲線は直角双曲線である．

Ⅲ. 接　　線

楕円の場合と同様の計算により，次のことが分かる．

> 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は，
>
> $$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

双曲線の接線

A7.4 一般の2次曲線

放物線，楕円，双曲線の標準形は

$$y^2=4px,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

のように，x，y の2次の方程式で表される．そこで，これらの曲線をまとめて **2次曲線** という．

I．平行移動と2次曲線

数学Iで学んだように，方程式

$$F(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

で表される曲線 C を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線 C' の方程式は

$$F(x-\alpha,\ y-\beta)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．

いいかえれば，方程式②の表す曲線は，①の表す図形を上のように平行移動したものである．

たとえば，方程式

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

は，楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動したものである．

1° 例 $x^2-2x+4y^2+24y=27$ ………⑤

が表す曲線 C の形を調べよう．⑤の左辺を，x，y それぞれについて **平方完成** すると

$$(x^2-2x+1)+4(y^2+6y+9)=27+1+36$$

$$\therefore\ (x-1)^2+4(y+3)^2=64$$

$$\therefore\ \frac{(x-1)^2}{8^2}+\frac{(y+3)^2}{4^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

これは，楕円 $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものである．

2°　**一般の2次曲線**

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

も，一般に，放物線，楕円，双曲線を表す（特別の場合には2直線になったり，空集合になったりすることもある）.

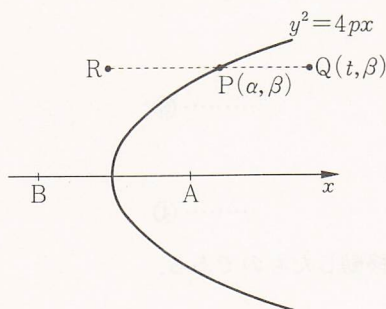
いくつかの具体例についてはB篇で扱うが，本格的な一般論は高校の範囲外である.

II．不等式の表す領域と2次曲線

いま，p を正数として，実数 x，y に対する不等式

$$y^2<4px \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える.

たとえば，$x=1$，$y=0$ のとき①は成り立っている．すなわち，点 A(1, 0) において①は成り立つ．逆に，点 B(−1, 0) においては①は成り立たない.

xy 平面において，①が成り立つような点全体の集合を，不等式①の表す領域という.

いま，放物線

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の上に任意の点 P$(\alpha,\ \beta)$ を取り，同じ y 座標をもっていてPより右にある点 Q$(t,\ \beta)$ を考える．すると

$$\beta^2=4p\alpha,\ \text{および}\ t>\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成立する．よって，$4pt>4p\alpha=\beta^2$ すなわち，

$$\beta^2<4pt \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

以上により，点Qでは不等式①が成り立つことが分かる.

よって，放物線②の右側では，不等式①が成り立つ.

同様に，放物線②の左側には，不等式

$$y^2>4px \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ（$p>0$ を仮定していることに注意）.

1°　$p>0$ の場合，$y^2=4px$ で分けられる平面の2つの部分で成り立つ不等式は図1のようになる．また $p<0$ の場合は図2のようになる．

図1　$p>0$

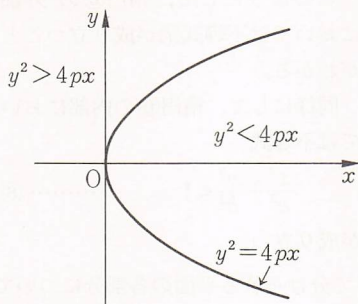
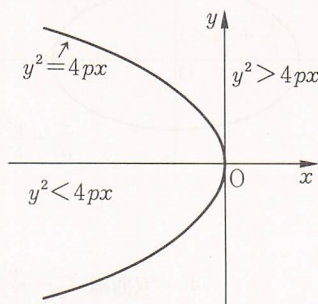
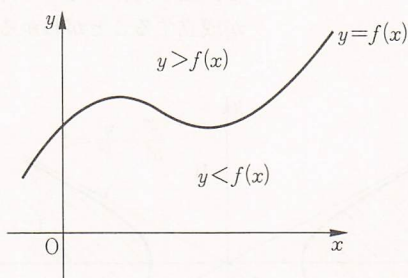



図2　$p<0$

2°　一般に，関数 $f(x)$ のグラフを C とするとき，不等式

$$y>f(x)$$

が表す領域は，C の上方であり，不等式

$$y<f(x)$$

が表す領域は，C の下方である．

3°　不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ あるいは $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域についても1°のときと同様な考察をすることができる．

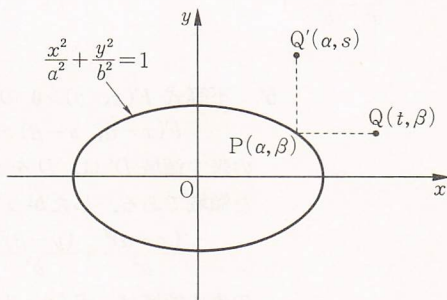
すなわち，図の $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

の第1象限の部分にあり，$\mathrm{Q}=\mathrm{Q}(t,\ \beta)$ がその水平右側，$\mathrm{Q}'=\mathrm{Q}'(\alpha,\ s)$ がその真上にあるとすれば

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1,\ 0<\alpha<t,\ 0<\beta<s$$

であるから

$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}>\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1,\ \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}>\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1.$$

したがって，Q，Q′においては，不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

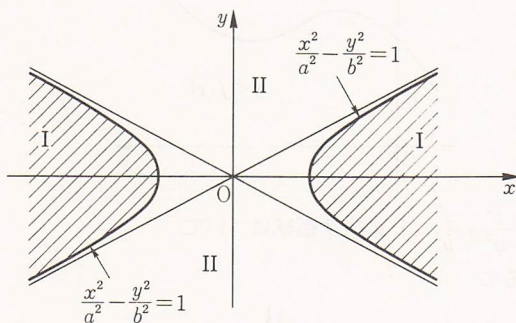
が成り立つ．

このようにして，楕円⑥の **外部** においては不等式⑦が成り立つことがわかる．

同様にして，楕円⑥の内部においては不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

が成り立つ．

4°　双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ によって分けられる平面の各部分についても，上と同様な考察を行うことにより，下図に示すような不等式が成立することがわかる．

図の斜線をつけたⅠの部分(これを双曲線の内部ということがある)では

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1$$

が成り立つ．

図のⅡの部分(平面からⅠの部分と双曲線とをのぞいた残りの部分)では

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1$$

が成り立つ．

5°　不等式 $F(x,\ y)>0$ の表す領域を D とするとき，不等式

$$F(x-\alpha,\ y-\beta)>0$$

の表す領域 D' は，D を x 軸方向に α，y 軸方向に β 平行移動した領域である．したがって，たとえば，

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}<1$$

の表す領域は，点 $(\alpha,\ \beta)$ を中心とする楕円

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

の内部である．

A7.5 媒介変数表示

I．楕　円

曲線の媒介変数表示については，「大学への数学IIニューアプローチ」A1.8 に説明した（本書 A2.2V も参照）

次の楕円の媒介変数表示はよく用いられる．

[定理]　a，b を正定数とするとき，媒介変数表示

$$\begin{cases} x=a\cos\theta & \cdots\cdots\cdots ① \\ y=b\sin\theta & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

は，楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

を表す．

1°　①における θ の意味は，円 $x^2+y^2=a^2$ および，円 $x^2+y^2=b^2$ を補助的に書きこんだ右の図から読みとれるであろう．

ただし，

Q$(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$

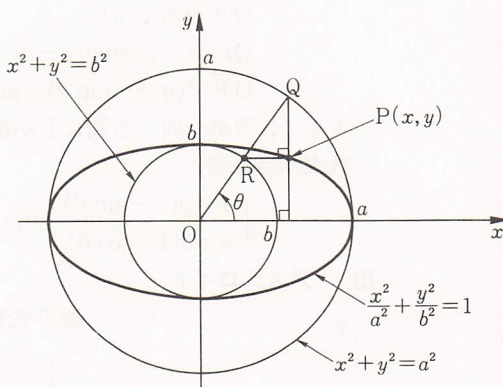
R$(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$

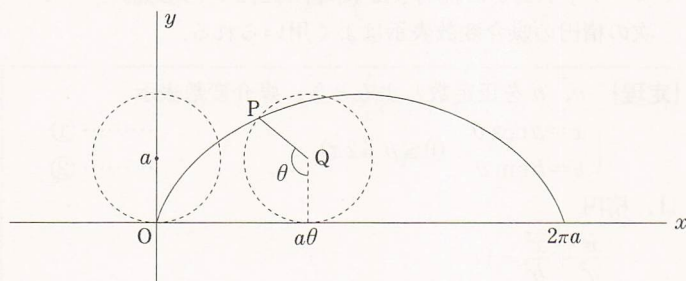
2°　特別な場合として，中心が原点で半径 r の**円の媒介変数表示**

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

もよく用いられる．中心が $(x_0,\ y_0)$ のときには

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$$

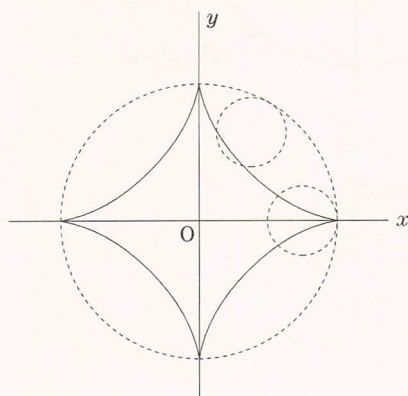
となる．

II.　サイクロイド

直線上を滑らずに回転しながら移動する円の周上の固定点が描く軌跡を**サイクロイド** (cycloid) という．x 軸の上側をころがる半径 a の円の場合を考える．円周上の固定点Pは，動きはじめのとき原点にあったとする．

角 θ だけ回転してころがった時点で，円の中心Qと点Pは，上図のような位置にあり，

$$\overrightarrow{OQ}=(a\theta,\ a)$$
$$\overrightarrow{QP}=(-a\sin\theta,\ -a\cos\theta)$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$$

よって，円が一周する間にPが描く曲線は，次のように媒介変数表示される．

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

III.　アステロイド

媒介変数表示

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

で与えられる曲線をアステロイド (asteroid) といい左図のような概形をもつ．θ を消去すると

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

となる．これは半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ の内側をすべらずにころがる半径 $\dfrac{a}{4}$ の円の周上の固定点が描く軌跡である．

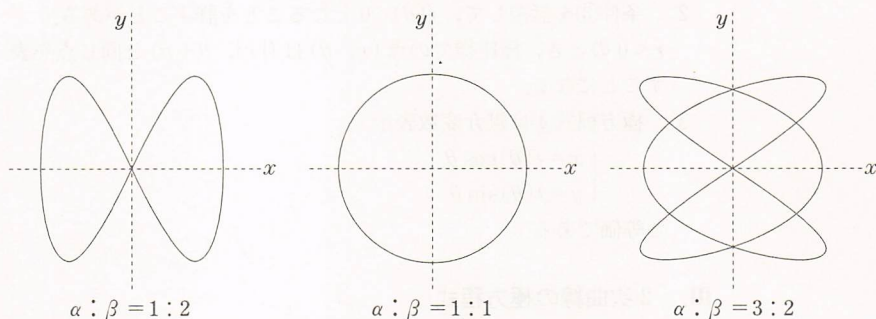
IV. リサジュー図形

α, β は実数の定数で, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ は有理数であるとする. このとき, 媒介変数表示

$$\begin{cases} x=\cos \alpha t \\ y=\sin \beta t \end{cases}$$

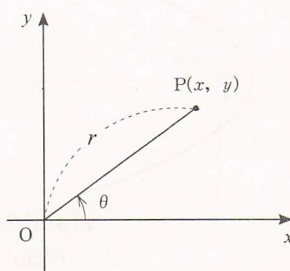
で表される曲線をリサジュー (Lissajous) 図形という.

特に $\alpha=\beta$ のときは, 円となる. 微分法を用いて, グラフの概形を描くときは, A 2.8, IV の方法を用いる (☞ B.315). また, コンピュータにより数値的に描画することも容易である.

$\alpha:\beta=1:2$　　$\alpha:\beta=1:1$　　$\alpha:\beta=3:2$

A7.6 極座標

I. 極座標

Oを原点とする xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し

$$\begin{cases} x=r\cos\theta & \cdots\cdots\text{①} \\ y=r\sin\theta & \cdots\cdots\text{②} \\ r\geqq 0 & \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$$

を満たす r (半径変数), θ (角変数) を考える. すなわち r はOP間の距離であり, θ は半直線OP (動径) と x 軸の正方向 (始線) がなす角である. θ には 2π の不定性がある. また, $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のときは θ を定義しない.

逆に, r, θ を与えたとき, ①, ②によって点 $(x,\ y)$ が定ま

る．そこで $(r,\ \theta)$ を点Pを表す座標と考え，Oを極とする極座標という．

II．　極方程式

点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とする．

Pが曲線 C 上にある　$\iff$　$r=f(\theta)$　………④

が成立するとき，④を曲線 C の極方程式という．

1°　原点を中心とする半径1の円の極方程式は

$$r=1$$

である．

2°　条件③を無視して，$f(\theta)<0$ となることを許すことがある．
$r<0$ のとき，極座標での点 $(r,\ \theta)$ は $(|r|,\ \theta+\pi)$ と同じ点を表すことになる．

3°　極方程式④は媒介変数表示

$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と等価である．

III．　2次曲線の極方程式

A7.1で考えた放物線 $y^2=4px$ の焦点 $(p,\ 0)$ が原点に来るように平行移動すると，その方程式は

$$y^2=4p(x+p) \qquad \text{………⑤}$$

となる．

角 θ 方向の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と原点の間の距離 r とすると，

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

が成立する．これを⑤に代入して

$$r^2\sin^2\theta=4p(r\cos\theta+p)$$

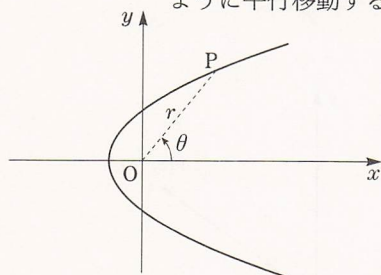
$$\therefore\quad r^2\sin^2\theta-4pr\cos\theta-4p^2=0$$

$$\therefore\quad ((1-\cos\theta)r-2p)((1+\cos\theta)r+2p)=0$$

$r>0$ だから，

$$r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

これが，放物線⑤の極方程式である．

同様に，焦点のひとつを極，軸を始線とする極座標を用いて，

楕円，双曲線を極方程式で表すと

$$r=\frac{C}{1-e\cos\theta}$$

となる．ただし e は離心率で（A7.2，A7.3），楕円の場合は $0<e<1$，双曲線の場合は $1<e$ である．（☞ B.726, B.729）

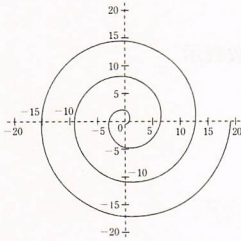
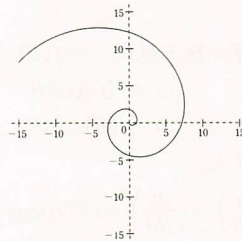
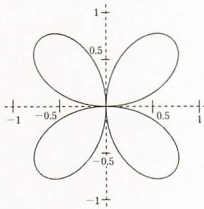
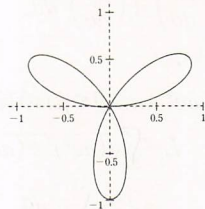
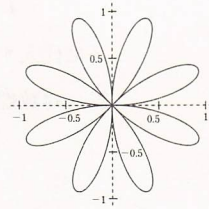
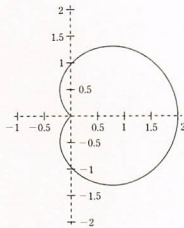
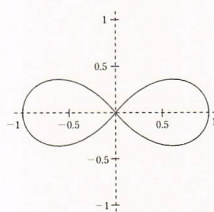
Ⅳ．曲線ミュージアム

$r=\theta$
アルキメデス螺線

$r=e^{x/\pi}$
対数螺線

[$n=2$]

[$n=3$]

[$n=4$]

正葉曲線
$r=\sin n\theta$

カージオイド
$r=1+\cos\theta$

レムニスケート
$r=\sqrt{\cos 2\theta}$

V．弧　長

> ［定理］　極方程式
> $$r=f(\theta)\qquad(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$$
> をもつ曲線弧の長さは，
> $$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$$
> で与えられる．

1°　**証明**：極方程式 $r=f(\theta)$ を，媒介変数表示

$$\begin{cases}x=f(\theta)\cos\theta\\ y=f(\theta)\sin\theta\end{cases}$$

に直すと，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)^2+(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)^2=f'(\theta)^2+f(\theta)^2$$

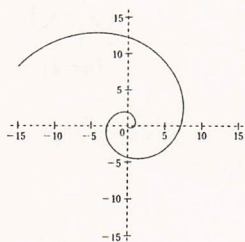
これを弧長の公式

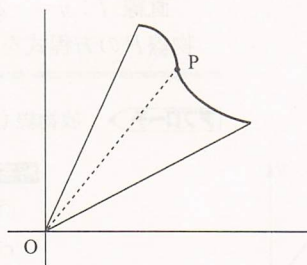
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

に代入すればよい．

2°　対数螺線 $r=ae^\theta$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ の長さは

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(ae^\theta)^2+(ae^\theta)^2}\,d\theta=\sqrt{2}\,a\int_\alpha^\beta e^\theta d\theta=\sqrt{2}\,a(e^\beta-e^\alpha)$$

特に $\beta=0$，$\alpha\to-\infty$ とすると，有限の長さ $\sqrt{2}\,a$ を得る．

VI. 面　積

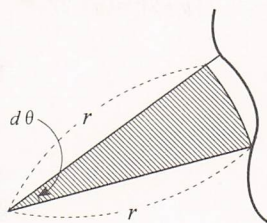
> [定理]　点Pが曲線弧
> $$r=f(\theta)\ (\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$$
> の上を動くとき，線分OPの通過する部分の面積は
> $$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2d\theta$$
> で与えられる

1°　半径 r，中心角 $d\theta$ の微小な扇形の面積は，$\frac{1}{2}r^2d\theta$ である．よってその和をとって，上式を得る．

2°　[例]　レムニスケートの右半分

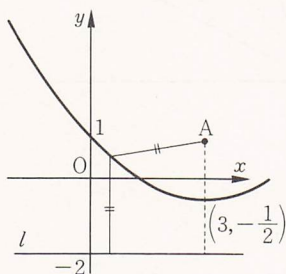
$$r=a\sqrt{\cos 2\theta}\ \left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$$

が囲む部分の面積は

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}\Big[\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{a^2}{2}$$

―― A7　おわり ――

B. 701

直線 l：$y=-2$ を準線とし，点 A(3, 1) を焦点とする放物線Pの方程式を求めよ．

アプローチ 放物線 (parabola) の定義に戻りましょう．

解答　点$(x,\ y)$から

直線 l に至る距離$=|y+2|$

点Aに至る距離$=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

であるので，点$(x,\ y)$が放物線P上にあるためには，

$$|y+2|=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つことが必要十分である．

①は，その両辺を平方して得られる式

$$(y+2)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$$

$|y+2|^2=(y+2)^2$ ▶

と同値であるので，これを整理して，放物線Pの方程式

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{6}(x^2-6x+6)}$$

を得る．

別解　直線 l が x 軸に平行であるから，x 軸に平行な直線 $y=-p$ を準線にもち，焦点が$(0,\ p)$の原点を頂点とする放物線 $x^2=4py$ を考えよう．

これを，x，y 方向にそれぞれ α，β だけ平行移動すると，その方程式は

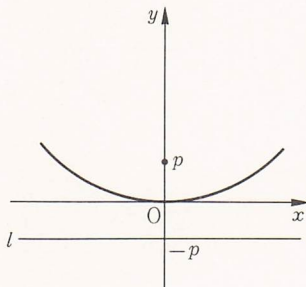
$$(x-\alpha)^2=4p(y-\beta) \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となり，準線：$y-\beta=-p$ ……… ③

焦点：$(\alpha,\ p+\beta)$ ……… ④

となる．よって，③，④がそれぞれ $y=-2$，(3, 1) と一致することから，

$$\begin{cases} \beta-p=-2 \\ \alpha=3 \\ p+\beta=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=-\dfrac{1}{2} \\ p=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

となるので，これらを②に代入すれば，求めるPの方程式が得られる．

B.702

放物線 $y^2=4px$ の頂点 O(0, 0) を通る互いに垂直な2本の直線がこの放物線と再び交わる2点をQ, Rとする. 直線QRは, つねに定点を通ることを示せ.

アプローチ 原点Oを通る直交する2直線の方程式を $y=mx$, $y=-\dfrac{1}{m}x$ とおき, $y^2=4px$ と連立して, Q, Rの座標を求めるという方針でも解決しますが, 得策ではありません. 先にQ, Rの座標を設定しましょう.

解答 Q, Rの y 座標をそれぞれ $2p\alpha$, $2p\beta$ $(\alpha\neq\beta,\ \alpha\beta\neq 0)$ とおくと,

◀単に α, β とおいてもよい. その場合は x 座標が $\dfrac{\alpha^2}{4p}$, $\dfrac{\beta^2}{4p}$ となる.

$$\mathrm{Q}(p\alpha^2,\ 2p\alpha),\ \mathrm{R}(p\beta^2,\ 2p\beta)$$

となり, OQ⊥OR となるべきことから, α, β は

$$\frac{2p\alpha}{p\alpha^2}\cdot\frac{2p\beta}{p\beta^2}=-1$$

$$\therefore\quad \alpha\beta=-4 \quad\cdots\cdots\ ①$$

を満たす.

ところで, 直線QRの方程式は,

$$x-p\alpha^2=\frac{p\alpha^2-p\beta^2}{2p\alpha-2p\beta}(y-2p\alpha)$$

$$\therefore\quad 2(x-p\alpha^2)=(\alpha+\beta)(y-2p\alpha)$$

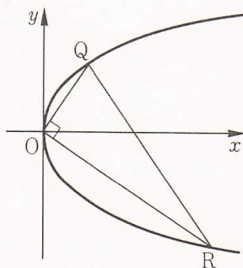
$$\therefore\quad 2x=(\alpha+\beta)y-2p\alpha\beta \quad\cdots\cdots\ ②$$

であり, ①を②へ代入すると,

$$2x=(\alpha+\beta)y+8p$$

$$\therefore\quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}y+4p$$

となる.

よって, この方程式で表される直線は, つねに定点 $(4p,\ 0)$ を通る. ■

[注] 放物線 $y^2=4px$ 上の任意の点Pの座標 $(x,\ y)$ は, 適当な実数 t を用いて,

$$\begin{cases} x=pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$$

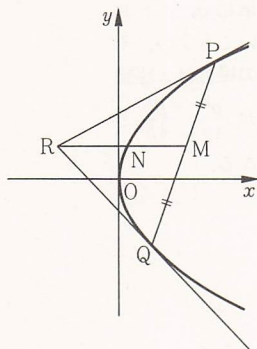
と表せる. (放物線の媒介変数表示)

B.703

放物線 $y^2=4px$ 上の異なる2点 $\mathrm{P}(p\alpha^2,\ 2p\alpha)$, $\mathrm{Q}(p\beta^2,\ 2p\beta)$ における接線の交点をR，弦PQの中点をM，直線RMと放物線との交点をNとする．次のことがらを証明せよ．

(1)　Nは線分RMの中点である．

(2)　Nにおける放物線の接線は，弦PQに平行である．

アプローチ　放物線の接線に関する有名な性質の1つです．

解答　(1)　Pにおける接線の方程式は，

$$2p\alpha\cdot y=2p(x+p\alpha^2)$$

$$\therefore\quad \alpha y=x+p\alpha^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

であり，同様に，Qでの接線は，

$$\beta y=x+p\beta^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるので，$\alpha\neq\beta$ を考慮し①，②を連立すると，Rの座標

$$(x_{\mathrm{R}},\ y_{\mathrm{R}})=(p\alpha\beta,\ p(\alpha+\beta))$$

が得られる．また中点Mの座標は

$$(x_{\mathrm{M}},\ y_{\mathrm{M}})=\left(\frac{p(\alpha^2+\beta^2)}{2},\ p(\alpha+\beta)\right)$$

であるので，直線RMの方程式は

$$y=p(\alpha+\beta)$$

となり，これと $y^2=4px$ とから y を消去してNの x 座標 $x_{\mathrm{N}}=p(\alpha+\beta)^2/4$ が得られる．

よって，$x_{\mathrm{R}}+x_{\mathrm{M}}=2x_{\mathrm{N}}$ が成り立つので，Nは線分RMの中点である．■

(2)　Nにおける接線は，

$$p(\alpha+\beta)\cdot y=2p\{x+p(\alpha+\beta)^2/4\}$$

$$\therefore\quad (\alpha+\beta)y=2\{x+p(\alpha+\beta)^2/4\} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

であり，弦PQの方程式は，

$$(\alpha+\beta)y=2x+2p\alpha\beta \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

であるので，③，④を見比べることにより，

Nにおける接線 // 弦PQ

がわかる．■

参考　アルキメデスは，上の事実を用いて，放物線と直線とで囲まれた部分の面積を求めた．

B. 704

放物線 $y^2=4px\ (p>0)$ 上の頂点以外の点Pにおける接線 l_P はPから準線に下した垂線PHと，Pと焦点Fを結ぶ直線のなす角 $\angle HPF$ を二等分することを証明せよ．

アプローチ 通常，角の大きさに関する問題は，cos (ベクトルの内積，または余弦定理) や tan (tan の加法定理) を媒介して考えますが，本問はちょっとした考察により“解析幾何”で鮮やかに証明できます．

解答 PH は放物線の軸 (x 軸) に平行なので，l_P と x 軸との交点をQとして

$$\angle FPQ=\angle FQP,$$

したがって，これと同値な

$$FP=FQ \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を証明すればよい．

$P(p\alpha^2,\ 2p\alpha)\ (\alpha\neq 0)$ とおくと，
l_P の方程式は，$2p\alpha\cdot y=2p(x+p\alpha^2)$

$$\therefore\quad \alpha y=x+p\alpha^2.$$

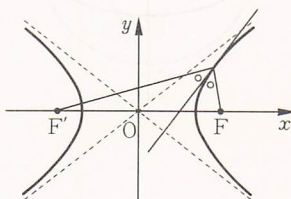
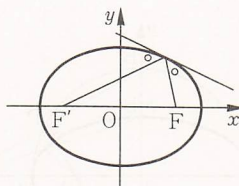
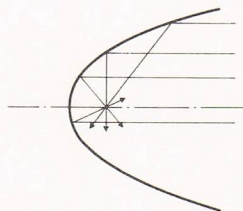
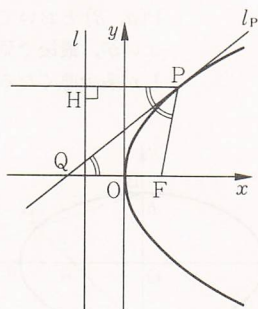
ゆえに，l_P と x 軸との交点Qは，

$$Q(-p\alpha^2,\ 0).$$

一方，焦点Fの座標は $(p,\ 0)$

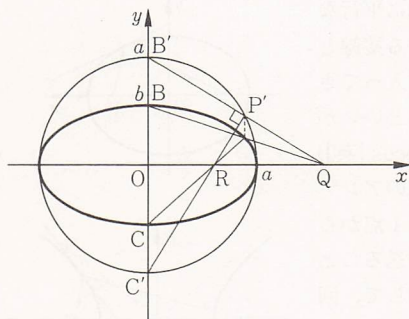
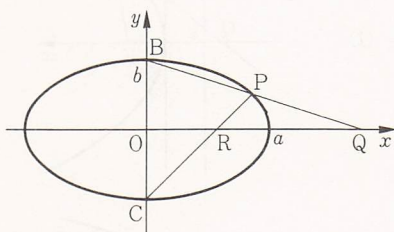
よって，
$$\begin{cases} FP^2=(p\alpha^2-p)^2+(2p\alpha)^2 \\ \qquad =p^2(\alpha^2+1)^2 \\ FQ=p-(-p\alpha^2)=p(1+\alpha^2) \end{cases}$$

より①が示された．■

研究 上で証明した事実は，「Pを通り，軸に平行な直線と，Pと焦点を結ぶ直線は，Pにおける接線と等しい角をなす」したがって「軸に平行に入ってきた光は，放物線で反射して，焦点を通る」といいかえることができる．この性質が，焦点 (focus [英]) という名の由来である．なお，レーダなどのアンテナは，電波や音波を1点に集めたり，逆に1点から発する電波や音波を遠方まで拡散しないで送ることができるように，放物線のこの性質を利用して，回転放物面 (放物線を中心軸のまわりに回転してできる曲面) でできている．なお，楕円の接線や双曲線の接線についても類似の性質がある．

B. 705

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上の第１象限にある点Pに対し，Pと楕円の短軸の両端を結ぶ２直線が x 軸と交わる点をQ，Rとする．このとき，積 OQ･OR はPの位置によらず一定になることを証明せよ．ただし，Oは原点である．

アプローチ　素直に計算すれば解決します．

P$(\alpha,\ \beta)$ とおいてもよいが，最後で見通しが多少悪くなる．

解答　P$(a\alpha,\ b\beta)$ とおくと，

$$\alpha^2+\beta^2=1\ (\alpha,\ \beta>0)\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

であり，PとB$(0,\ b)$ を通る直線

$$y=-\frac{b-b\beta}{a\alpha}x+b$$

において，$y=0$ とおき，Qの x 座標

$$x_{\mathrm{Q}}=\frac{a\alpha}{1-\beta}=\mathrm{OQ}$$

を得る．同様にして，$x_{\mathrm{R}}=\dfrac{a\alpha}{1+\beta}=\mathrm{OR}$

となるので，①を用いると，

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\frac{a\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{a\alpha}{1+\beta}$$
$$=\frac{a^2\alpha^2}{1-\beta^2}=\frac{a^2\alpha^2}{\alpha^2}$$
$$=a^2=\text{一定}.\ ■$$

［注］　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を y 軸方向に b/a 倍にしたもの（☞B.706）であり，本問は，x 軸上の長さ OQ，OR だけの考察なので，楕円を y 軸方向に a/b 倍にして円 $x^2+y^2=a^2$ 上の第１象限にある点P′ とB′$(0,\ a)$，C′$(0,\ -a)$ を通る２直線を考えても，積 OQ･OR には影響しない．

よって，左図において，

$\triangle\mathrm{OQB'}\backsim\triangle\mathrm{OC'R}$ より $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OR}}$

$\therefore\ \ \mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OB'}\cdot\mathrm{OC'}=a^2$ が分かる．

B. 706

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …… ① $(a>b>0)$ がある.

(1) 楕円①は，原点を中心とする半径 a の円

$x^2+y^2=a^2$ …… ② を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍したものである

ことを示せ.（楕円のもうひとつの定義）

(2) 楕円①上の任意の点の座標は，適当な角 θ

$(0°\leqq\theta<360°)$ を用いて，$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と表せること

を示せ.（楕円のパラメタ表示）

アプローチ (1)，(2)とも重要な楕円の基本事項です.

解答 (1) 点 $(X,\ Y)$ を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した点を $(x,\ y)$ とおくと，

$$\begin{cases} x=X \\ y=\dfrac{b}{a}Y \end{cases} \iff \begin{cases} X=x \\ Y=\dfrac{a}{b}y \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \ ③$$

が成り立つので，点 $(X,\ Y)$ が円②上を動くと，③で定まる点 $(x,\ y)$ は，楕円①上を動くことが分かる. よって，楕円①は，円②を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍したものである. ■

◀ ③を $X^2+Y^2=a^2$ に代入.

(2) 円②上の点 $(X,\ Y)$ と原点Oとを結ぶ動径の x 軸からの回転角を θ とおくと，三角関数の定義により，

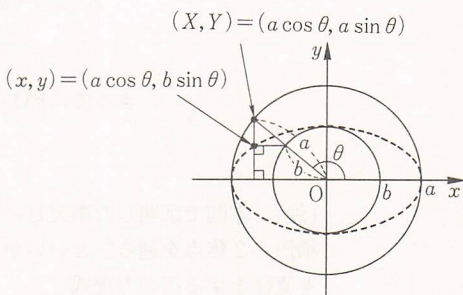
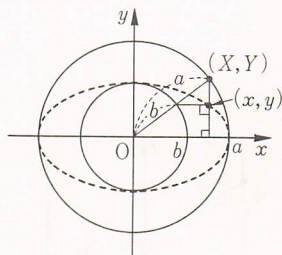
$$\begin{cases} X=a\cos\theta \\ Y=a\sin\theta \end{cases}$$

となる.

よって，(1)により，楕円①上の点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{cases} x=X=a\cos\theta \\ y=\dfrac{b}{a}Y=b\sin\theta \end{cases}$$

と表せる. ■

[注] θ と楕円①上の点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ の位置の関係は注意しないと誤りやすい.

B.707

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の焦点をF，F′，長軸の両端をA$(a,\ 0)$，A′$(-a,\ 0)$とする．楕円上のA，A′以外の任意の点Pにおける接線がA，A′における接線と交わる点をQ，Q′とすると，FQ⊥FQ′ となることを示せ．

アプローチ B.705のように P$(a\alpha,\ b\beta)$ とおくことは，本質的にB.706で学んだ楕円のパラメタ表示と同じことです．ここでは，楕円のパラメタ表示を利用してみましょう．

解答　P$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(\sin\theta\neq 0)$
とおくと，Pにおける接線は

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であり，長軸の両端A，A′における接線は

$$x=a \ \cdots\cdots\cdots ②, \qquad x=-a \ \cdots\cdots\cdots ②'$$

であるので，①と②，①と②′を連立して，交点Q，Q′の座標を求めると，

$$\mathrm{Q}\left(a,\ b\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right),\ \mathrm{Q'}\left(-a,\ b\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

となる．

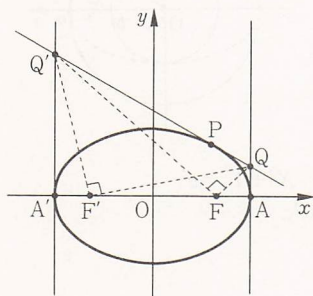
一方，焦点Fの座標は，F$(c,\ 0)$であるので，

（ただし，$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}$）

(FQの傾き)×(FQ′の傾き)

$$=\left(\frac{b}{a-c}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{b}{-a-c}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=-\frac{b^2}{a^2-c^2}\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{b^2}{a^2-c^2}=-1$$

よって，FQ⊥FQ′　である．■

［注］ 本問で証明した事実は，“線分QQ′を直径とする円はつねに，楕円の2焦点を通る”といいかえることができる．したがって，QQ′を直径とする円の方程式

$$(x-a)(x+a)+\left(y-b\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(y-b\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=0$$

に，$y=0$ を代入して，$x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$ を導くという別解も考えられる．

B. 708

楕円 $Ax^2+By^2=1$ (A, Bは正の定数) 上の異なる2点P, Qにおける接線の交点Rと原点Oを結ぶ直線は，弦PQの中点Mを通ることを示せ．

アプローチ P, Qの座標を指定して，直線ORの方程式をどう求めるかがポイントです．

解答 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ とおくと，

$$\begin{cases} Ax_1{}^2+By_1{}^2=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ Ax_2{}^2+By_2{}^2=1 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり，P, Qにおける接線は，それぞれ

$$\begin{cases} Ax_1x+By_1y=1 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ Ax_2x+By_2y=1 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

である．

いま，③−④を作ると，

$$A(x_1-x_2)x+B(y_1-y_2)y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

となり，これは，③, ④をともに満たす x, y について成立し，しかも，定数項がない x, y の1次方程式なので原点を通る直線を表す．

よって，⑤は直線ORの方程式である．

◀ Rの座標を求めずに直線ORの方程式を求めた．

ところで，線分PQの中点Mの座標は

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ であるので，Mが直線OR上にある条件は

$$A(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2}{2}+B(y_1-y_2)\frac{y_1+y_2}{2}=0$$

$$\therefore\quad Ax_1{}^2+By_1{}^2-(Ax_2{}^2+By_2{}^2)=0$$

となることであるが，この成立は，①, ②により保証される．

ゆえに，Mは直線OR上にある．■

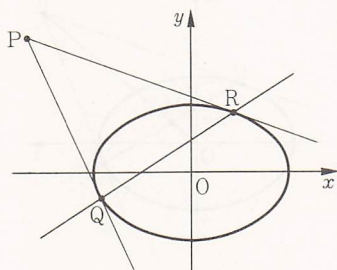
［注］ ③−④という変形は「2曲線 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ が共有点をもっているとき，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ なる定数 a, b を用いて作った $af(x,\ y)+bg(x,\ y)=0$ という方程式は，そのすべての交点を通るある曲線を表す」という事実に基いている．なお，$a=1$, $b=-1$ を選んだ(③−④を作る)のは，定数項を0にして，原点Oを通るようにするためである．

B. 709

楕円 $Ax^2+By^2=1$ (A, B は正の定数) の外部の点 $P(x_0, y_0)$ から，この楕円にひいた接線の接点を Q, R とするとき，

直線 QR は　$Ax_0x+By_0y=1$

という方程式で表されることを示せ．

アプローチ 自力で解こうとするよりも，解答を熟読してそのエレガンスを味わうことができれば立派なものです．

解答 Q, R の座標を $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ とおくと，

Qにおける接線は　$Ax_1x+By_1y=1$

Rにおける接線は　$Ax_2x+By_2y=1$

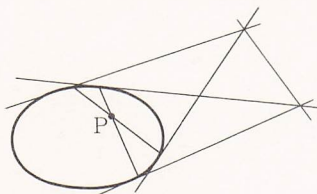
である．これらが点 $P(x_0, y_0)$ を通るための条件は，

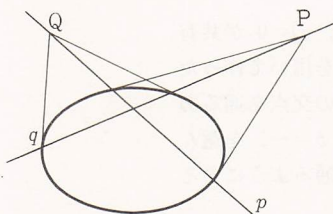
$$\begin{cases} Ax_1x_0+By_1y_0=1 & \cdots\cdots ① \\ Ax_2x_0+By_2y_0=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成立することである．ところが，見方をかえると，①，②は，2 点 $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ が，

$$Ax_0x+By_0y=1 \quad \cdots\cdots ③$$

という 1 次方程式で表される直線上にあることを示している．よって③は，直線 QR の方程式である． ■

[注] ③は，接線の方程式と同じ形をしているが，(x_0, y_0) は楕円上の点ではないので接線ではない．

研究 点 $P(x_0, y_0)$ に対し，③の表す直線を，楕円 $Ax^2+By^2=1$ に関する P を極 (pole) とする極線 (polar) と呼ぶ．極 P が楕円外にあるとき，極線がどんなものになるかを本問は示している．

極 P が楕円上にあるときは，極線は極における接線になり，
極 P が楕円内にあるときは，“P を通る任意の弦の両端における接線の交点が極線上にある”といえる．

双曲線，放物線についても，極 ↔ 極線 を同様に考えることができ，極と極線については，極めて elegant な関係がいくつか成りたつ．ここでは，その一例を紹介しておこう．

“点 P を極とする極線 p 上の任意の点 Q を極とする極線 q は，つねに点 P を通る．”《極と極線の相反性》

B. 710

原点Oを中心とする双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$

上の任意の点Pにおける接線とその漸近線との交点をQ，Rとする．次のことがらを証明せよ．

(1)　Pは線分QRの中点である．

(2)　△OQRの面積Sは一定である．

アプローチ　Pの座標を設定し，Q，Rの座標を求めます．

解答　$P(a\alpha,\ b\beta)$ とすると，

$\alpha^2-\beta^2=1$

であり，Pにおける双曲線の接線は

$$\frac{\alpha}{a}x-\frac{\beta}{b}y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

である．また，双曲線の漸近線は

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \cdots\cdots ②$$

であるので，①，②を連立することにより，右図のQ，Rの座標は

$$Q(x_Q,\ y_Q)=\left(\frac{a}{\alpha-\beta},\ \frac{b}{\alpha-\beta}\right)$$

$$R(x_R,\ y_R)=\left(\frac{a}{\alpha+\beta},\ -\frac{b}{\alpha+\beta}\right)$$

となる．

◀ $P(\alpha,\ \beta)$ とおくと，α，β は $\dfrac{\alpha^2}{a^2}-\dfrac{\beta^2}{b^2}=1$ を満たすことになり，後の処理の見通しが多少悪くなる．（$cf.$ B.705，707）

(1)　$x_Q+x_R=\dfrac{2a\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\dfrac{2a\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$

$=2a\alpha=2x_P$

◀ $\alpha^2-\beta^2=1$

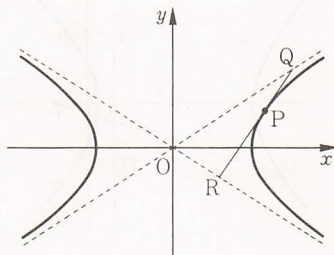
であり，3点P，Q，Rは同一直線上にあるので，Pは線分QRの中点である．■

◀ $y_Q+y_R=2y_P$ を示す必要はない．

(2)　$S=\dfrac{1}{2}|x_Ry_Q-x_Qy_R|$

◀ 三角形の面積の公式．

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2ab}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}\right|=ab=$一定．■

◀ $\alpha^2-\beta^2=1$

［注］　漸近線②のなす角を2θとすると

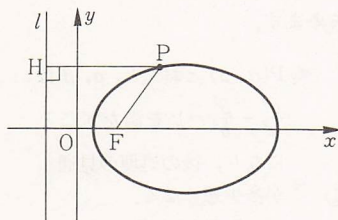
$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}\sin 2\theta=\mathrm{OQ}\sin\theta\cdot\mathrm{OR}\cos\theta=y_Q\cdot x_R=ab.$$

B. 711

定点 $F(1,\ 0)$ と定直線 $l：x=-1$ がある．Pから l に下した垂線の足をHとするとき，

(1) $\sqrt{2}\,PF=PH$　　　(2) $PF=\sqrt{2}\,PH$

となる点Pの軌跡を求めよ．

アプローチ 条件を数式に翻訳するだけです．

解答 $P(x,\ y)$ とおくと

(１) $\sqrt{2}\,PF=PH$

$\iff \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+1|$

$\iff 2\{(x-1)^2+y^2\}=(x+1)^2$

$\iff x^2-6x+2y^2=-1$

であるから，Pの軌跡は

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{(x-3)^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1}$ である．

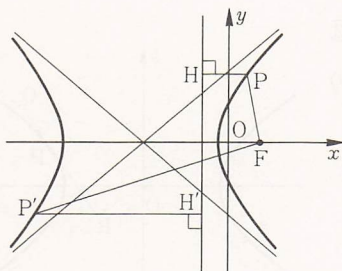
(２) $PF=\sqrt{2}\,PH$

$\iff \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}\,|x+1|$

$\iff (x-1)^2+y^2=2(x+1)^2$

$\iff x^2+6x-y^2=-1$

であるから，Pの軌跡は，

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{(x+3)^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1}$ となる．

研究 一般に，定点 $F(p,\ 0)$，定直線 $l：x=-p$ に対し，Pから l に下した垂線の足をHとして，$PF/PH=e$（e は正の定数）となる点Pの軌跡の方程式は，

$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=e|x+p|$　　$\therefore\ \{(x-p)^2+y^2\}=e^2(x+p)^2$

$\therefore\ (1-e^2)x^2-2p(1+e^2)x+(1-e^2)p^2+y^2=0$

となる．したがって，$p\neq 0$ のときPの軌跡は，x^2 の係数に注目して

ⅰ）$e<1$ のときは，楕円　　ⅱ）$e=1$ のときは，放物線

ⅲ）$e>1$ のときは，双曲線

になり，放物線以外の２次曲線も，準線と焦点を用いて定義できることが分かる．楕円 ellipse，放物線 parabola，双曲線 hyperbola の語源は，この定数 e を１と比較したときの“不足する”，“つりあう”，“超過する”に相当するギリシア語に由来している．なお，この定数 e は，楕円，双曲線の離心率に相当している．

B.712

楕円 E：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ ………①
双曲線 H：$x^2-y^2=1$ ………②
} がある．

(1)　E，Hは2焦点を共有することを確めよ．

(2)　EとHは4点で交わることを示せ．

(3)　EとHは，4点で直交することを示せ．ただし，2曲線が直交するとは，交点における各曲線の接線が直交することである．

アプローチ　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の焦点は $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点は $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$ です．

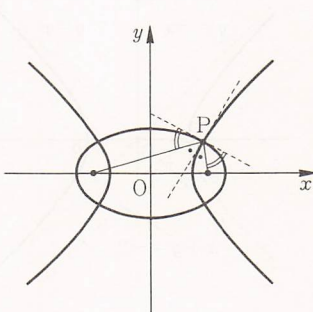
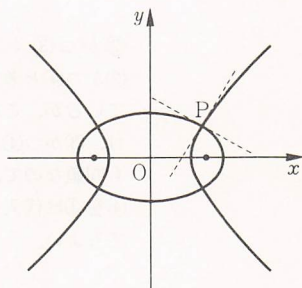
解答　**(1)**　Eの焦点は $(\pm\sqrt{3-1},\ 0)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$，Hの焦点は $(\pm\sqrt{1+1},\ 0)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$ である．
よって，E，Hは2焦点を共有する．

(2)　①，②を連立すると
$x^2=3/2,\ y^2=1/2$　　∴　$x=\pm\sqrt{6}/2,\ y=\pm\sqrt{2}/2$
(複号任意)　　　ゆえにEとHは，4点
$(\sqrt{6}/2,\ \pm\sqrt{2}/2),\ (-\sqrt{6}/2,\ \pm\sqrt{2}/2)$
で交わる．■

(3)　交点を $(\alpha,\ \beta)$ とおくと，$\alpha^2=3/2,\ \beta^2=1/2$ であり，その点における，

$$\begin{cases}\text{Eの接線は},\ \dfrac{\alpha}{3}x+\beta y=1,\ \text{その傾きは}\ m_1=-\dfrac{\alpha}{3\beta}\\ \text{Hの接線は},\ \alpha x-\beta y=1,\ \text{その傾きは}\ m_2=\alpha/\beta\end{cases}$$

である．　∴　$m_1m_2=-\dfrac{\alpha^2}{3\beta^2}=-\dfrac{3/2}{3/2}=-1$

したがって，交点における接線は直交する．■

研究　一般に，楕円 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と双曲線 H：$\dfrac{x^2}{a'^2}-\dfrac{y^2}{b'^2}=1$ が2焦点を共有するとき，すなわち，$a^2-b^2=a'^2+b'^2$ が成立するとき，EとHは必ず直交する．証明は読者に委ねよう．なお，この事実は，B.704の研究で述べた楕円，双曲線の接線の性質を思い浮かべれば，納得できる．

B.713

t が $t>-1$ $(t\neq 0)$ ………① の範囲のすべての実数値をとって変化するとき,

$$x=t+\frac{1}{t}\ \cdots\cdots\ ②,\qquad y=t-\frac{1}{t}\ \cdots\cdots\ ③$$

と媒介変数表示された曲線の概形を描け.

アプローチ ①, ②, ③で定められる点 $(x,\ y)$ の軌跡 L とは, ①を満たすある t を用いて, ②, ③で表されるような $(x,\ y)$ 全体です.
したがって,

$(x,\ y)\in L \iff$ "①, ②, ③を満たす t が存在する"

が成り立ちます.

解答 ②+③より,

$$x+y=2t\quad\therefore\quad t=\frac{x+y}{2}\qquad\cdots\cdots\ ④$$

である. これを②へ代入して t を消去すると,

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\quad\therefore\quad x^2-y^2=4\ \cdots\cdots\ ⑤$$

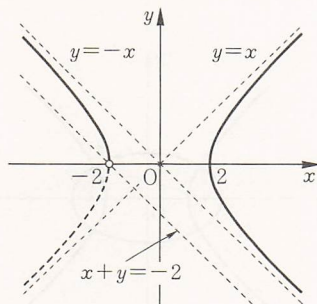
となり, また, ④を①に代入すると,

$$\frac{x+y}{2}>-1\ \ (x+y\neq 0)\qquad\cdots\cdots\ ⑥$$

となる.

よって, ⑤, ⑥より, 曲線は,

双曲線 $x^2-y^2=4$ の $x+y>-2$ の部分であり, その概形は左図のようになる.

②かつ③ ⟺ ②かつ④と考えているが, これは, ③かつ④とも同値なので, ④を③に代入してもよい.

[注] $②^2-③^2$ を作るとすぐに⑤が得られるが, ①の範囲における x や y またはその両方の値の範囲を求めても, 軌跡の限界は得られない. これは, ⑤が x についても y についても2次式であるため, x, y の一方の値を決めても他方の値はただ1つには決まらないからである.

研究 $t=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$ とおくと, $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$, $y=2\tan\theta$ となる.
一般に, 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は, $x=\dfrac{a}{\cos\theta}$, $y=b\tan\theta$ とパラメタ表示される.

B. 714

楕円 $Ax^2+y^2=B$ ………① $(A>0,\ B>0)$ に，傾き m (m は定数) の直線 $y=mx+t$ ………② が 2 点 P，Q で交わるとき，線分 PQ の中点 M は，定直線上にあることを示せ．

アプローチ 交点 P，Q の x 座標は，①，②から y を消去して得られる x の 2 次方程式の 2 つの実数解です．

解答 ①，②より y を消去すると，

$$Ax^2+(mx+t)^2=B$$

$$\therefore\quad (A+m^2)x^2+2mtx+(t^2-B)=0 \quad ………\ ③$$

となり，交点 P，Q の x 座標 x_P，x_Q は③の 2 実数解であるから，

$$x_P+x_Q=-\frac{2mt}{A+m^2}$$

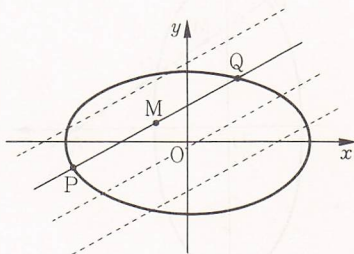
中点 M の座標を $(x_M,\ y_M)$ とおくと，

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_P+x_Q}{2}=-\dfrac{mt}{A+m^2} \\ y_M=mx_M+t=\dfrac{At}{A+m^2} \end{cases}$$

◀ M は，直線②上の点だから，$y_M=mx_M+t$

したがって，中点 $M(x_M,\ y_M)$ は，t の値によらず，つねに定直線

$$Ax+my=0 \quad ………\ (*)$$

上にある．■

[注]　1° 中点 M の軌跡の限界は，③が異なる 2 実数解をもつための条件からも得られるが，図形を思い浮べれば，直線(*)の楕円①の内部にある部分であることは明らかである．

2°　方程式(*)を導くだけなら，次のような解法もある．

[別証]　2 交点を $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ とし，$M(x_M,\ y_M)$ とおくと

$$\begin{cases} Ax_1{}^2+y_1{}^2=B \ …… \ ③, \quad Ax_2{}^2+y_2{}^2=B \ …… \ ④ \\ x_1+x_2=2x_M,\ \ y_1+y_2=2y_M \ …… \ ⑤ \end{cases}$$

③－④より　$A(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$

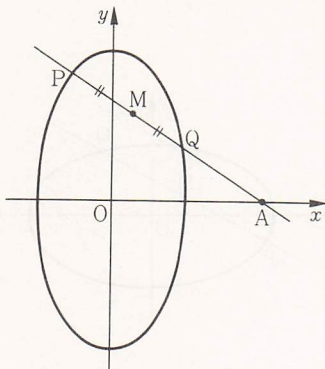
⑤を代入して，$2A(x_1-x_2)x_M+2(y_1-y_2)y_M=0$

PQ は傾き m の直線上の点だから，$y_1-y_2=m(x_1-x_2)$ を代入して，$2(x_1-x_2)$ $(\neq 0)$ で割ると，$Ax_M+my_M=0$

ゆえに，M は，定直線 $Ax+my=0$ 上にある．■

B.715

点 A(2, 0) を通る直線 $y=m(x-2)$ ………① が，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ………② と異なる2点P，Qで交わるとき，PQの中点Mは，つねにある定楕円上にあることを示せ．

アプローチ 前問と似ていますが，直線についての条件は“傾き＝一定”のかわりに，“定点通過”となっています．

解答 ①，②より y を消去して

$$4x^2+m^2(x-2)^2=4$$

$$\therefore\quad (m^2+4)x^2-4m^2x+4(m^2-1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

交点P，Qの x 座標 x_P，x_Q は，③の2解だから，

$$x_P+x_Q=\frac{4m^2}{m^2+4}$$

Mの座標を $(x_M,\ y_M)$ とおけば，

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_P+x_Q}{2}=\dfrac{2m^2}{m^2+4} \\ y_M=m(x_M-2)=-\dfrac{8m}{m^2+4} \end{cases}$$

この変形に気づくには，若干の修業？が必要．▶

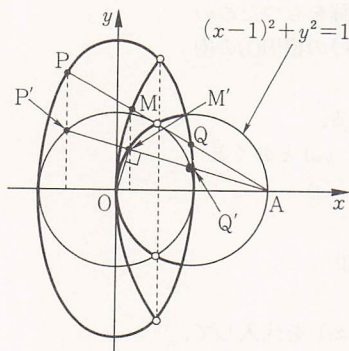
$$\therefore\quad \left(\frac{x_M}{2}\right)^2+\left(\frac{y_M}{4}\right)^2=\frac{m^4+4m^2}{(m^2+4)^2}=\frac{m^2}{m^2+4}=\frac{x_M}{2}$$

ゆえに，点Mは，つねに定楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=\frac{x}{2}\qquad \therefore\quad (x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

上にある．■

［注］ 1° 前問B.714と同様，軌跡の限界は，楕円②の内部にある条件で与えられる．よって，Mの軌跡は楕円弧 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ かつ $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ である．

2° 楕円②の代りに円 $x^2+y^2=1$ ………②′ で考えたとき，弦P′Q′の中点M′の軌跡がOAを直径とする円弧になることは，∠OM′A＝90° という条件からすぐわかる．したがって，楕円②は，円②′を y 軸方向に2倍に伸ばしたものなので，Mの軌跡は，M′の描く円弧を y 軸方向に2倍に伸ばした楕円弧となる．

B. 716

点 A$(-a,\ 0)$ を中心とする半径 r_0 の円 C_0 の内部に，点 B$(a,\ 0)$ を中心とする半径 r_1 の円 C_1 があり，$a \neq 0$ とする．円 C_0 に内接し，円 C_1 に外接する円 C の中心Pの軌跡を求めよ．

アプローチ 2円の内接・外接条件は…

解答 P$(x,\ y)$，円 C の半径を r とおくと，円 C が円 C_0 に内接するための条件より，

AP$=r_0-r$ $\therefore$ $(x+a)^2+y^2=(r_0-r)^2$ ……… ①

また，円 C が円 C_1 に外接するための条件より，

BP$=r_1+r$ $\therefore$ $(x-a)^2+y^2=(r_1+r)^2$ ……… ②

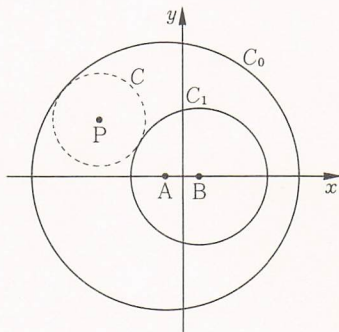
①−②より，$r=\dfrac{(r_0{}^2-r_1{}^2-4ax)}{2(r_0+r_1)}$ ……… ③

であるから，③を①に代入して r を消去すれば，

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{r_0+r_1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\dfrac{(r_0+r_1)^2-4a^2}{4}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

となる．また，$r>0$ であるべきことから，③より

$4ax<r_0{}^2-r_1{}^2$ ……… ⑤

であるべきだが，円 C_1 が円 C_0 の内部にあったことから，$2a<r_0-r_1$ であるから，楕円④上の点は，すべて⑤を満たす．よって，点Pの軌跡は，④で表される **楕円** である．

研究 上のような解析幾何 (analytic geometry) 的な解法のほかに，次のような総合幾何 (synthetic geometry) 的解法もある．

別解 円 C_0 と円 C との接点をQ，円 C_1 と円 C との接点をRとすると

$$\begin{cases} \text{AP}=\text{AQ}-\text{PQ}=r_0-r & \cdots\cdots\cdots ①' \\ \text{BP}=\text{BR}+\text{RP}=r_1+r & \cdots\cdots\cdots ②' \end{cases}$$

$\therefore$ AP+BP$=r_0+r_1=$一定 ……… ③′

であるから，動点Pは，2定点A，Bを焦点とし，r_0+r_1 を長軸の長さとする楕円上にある．

逆に，この楕円上に任意に点Pをとると③′が成り立つから，適当な正の数 r を用いて①′，②′のように表せる．いいかえれば，Pを中心として半径 r の円を描くと，この円は C_0 に内接し C_1 に外接する．

よって，Pの軌跡は，上で求めた楕円である．

B.717

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ………① の互いに垂直な接線の交点Pの軌跡Lを求めよ.

アプローチ 点$(\alpha,\ \beta)$を通る接線を考えてみましょう.

解答 点$\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$が$L$上にあるための必要十分条件は,

“Pから,楕円①に,互いに垂直な2本の接線がひける” ……… $(*)$

ことである.

i) $\alpha=\pm a$ のとき

図を想い浮かべることにより,$(*)\iff\beta=\pm b$

ii) $\alpha\neq\pm a$ のとき

Pからひいた接線はy軸に平行でないので,

$$y=m(x-\alpha)+\beta \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

とおける.

①と②が接するのは,②を①へ代入してyを消去したxの2次方程式

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2m(m\alpha-\beta)x+a^2\{(m\alpha-\beta)^2-b^2\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が重解をもつとき,つまり

$$(\text{判別式})/4=a^4m^2(m\alpha-\beta)^2-a^2(a^2m^2+b^2)\{(m\alpha-\beta)^2-b^2\}=0$$

$$\therefore\quad (a^2-\alpha^2)m^2+2\alpha\beta m+(b^2-\beta^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

のときである.この2次方程式の2解がPから楕円にひいた接線の傾きmであるので,

$(*)\iff$ ④が,$m_1m_2=-1$ である2実数解 m_1,m_2 をもつ

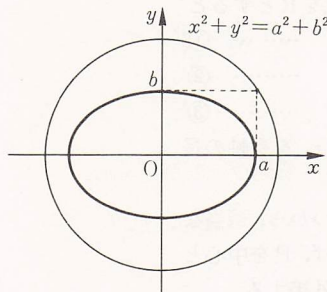
$$\iff \frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}=-1$$

$$\iff \alpha^2+\beta^2=a^2+b^2 \text{ かつ } \alpha\neq\pm a$$

となる.

以上 i),ii)より,求めるLは,

円 $x^2+y^2=a^2+b^2$

である.

B. 718

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の長軸の両端を $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{A}'(-a,\ 0)$ とし，直線 $x=t(-a<t<a,\ t\neq 0)$ がこの楕円と交わる点をP, P′ とする．2直線 A′P と AP′ の交点Rの軌跡を求めよ．

アプローチ P, P′ は x 軸に関して対称ですね．

解答 P, P′ の座標は，$(t,\ s)$, $(t,\ -s)$ とおけるので，直線 A′P, AP′ の方程式は

$$y=\frac{s}{t+a}(x+a),\qquad y=-\frac{s}{t-a}(x-a)$$

となり，これらを連立することにより，点Rの座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{a^2}{t}\ \cdots\cdots\ ①,\qquad y=\frac{as}{t}\ \cdots\cdots\ ②$$

となる．①, ②は，それらを t, s について解いた，

$$t=\frac{a^2}{x}\ \cdots\cdots\ ③,\qquad s=\frac{ay}{x}\ \cdots\cdots\ ④$$

と同値であり，t, s の変域は

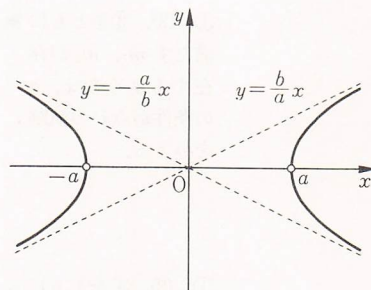
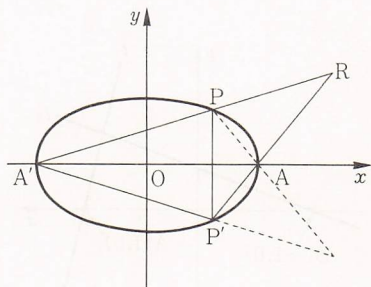
$$\frac{t^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1,\ -a<t<a,\ t\neq 0$$

という条件で与えられるので，③, ④をこれらに代入すれば，

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2y^2}{b^2x^2}=1,\ -a<\frac{a^2}{x}<a,\ \frac{a^2}{x}\neq 0$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\ ⑤,\ x\neq\pm a$$

となる．

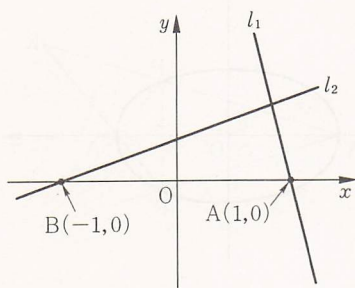
よって，交点Rの軌跡は，**双曲線⑤から，2点 $(\pm a,\ 0)$ を除いたもの** である．

[注]　$t=\pm a$ のとき，つまり P=P′=A またはA′のときは，2直線 A′P と AP′ の交点はAまたはA′であると拡張解釈をすれば，2点 $(\pm a,\ 0)$ を除く必要はなくなる．

B.719

点 A(1, 0) を通り傾き m_1 の直線を l_1, 点 B(−1, 0) を通り傾き m_2 の直線を l_2 とする．

(1)　m_1, m_2 が, $m_1m_2=-4$ を満足しながら変化するとき, l_1, l_2 の交点Pの描く軌跡を求めよ．

(2)　$m_1m_2=1$ のときはどうか．

アプローチ　2直線 l_1, l_2 の交点とは, l_1, l_2 の方程式をともに満たす $(x,\ y)$ のことです．

解答　2直線 l_1, l_2 の交点を $P(x,\ y)$ とおくと,

$$\begin{cases} y=m_1(x-1) & \cdots\cdots\ ① \\ y=m_2(x+1) & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

が成り立つ．

$m_1m_2 \neq 0$ のときは, 交点Pは x 軸上にない, つまり, $y \neq 0$ であるので,

$$x-1 \neq 0 \text{ かつ } x+1 \neq 0$$

であると考えてよい．したがって, ①, ②は

$$m_1=\frac{y}{x-1}\ \cdots\cdots\ ①',\quad m_2=\frac{y}{x+1}\ \cdots\cdots\ ②'$$

と変形される．

(1)　①′, ②′ を

$$m_1m_2=-4 \qquad \cdots\cdots\ ③$$

に代入して, m_1, m_2 を消去すると,

①, ②, ③をともに満たす m_1, m_2 が存在するような x, y の条件が点Pの軌跡を与える．

$$\frac{y^2}{x^2-1}=-4 \quad \therefore \quad x^2+\frac{y^2}{4}=1 \text{ かつ } x \neq \pm 1$$

となるので, 求める交点Pの軌跡は,

楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ から2点 (±1, 0) を除いたもの である．

(2)　①′, ②′ を $m_1m_2=1$ ……④ に代入して, m_1, m_2 を消去すると,

①, ②, ④をともに満たす m_1, m_2 が存在するような x, y の条件を求めている．

$$\frac{y^2}{x^2-1}=1 \quad \therefore \quad x^2-y^2=1 \text{ かつ } x \neq \pm 1$$

となるので, 点Pの軌跡は,

双曲線 $x^2-y^2=1$ から2点 (±1, 0) を除いたもの となる．

B.720

(1)　2 直線 $l: ax+by=0$, $m: ax-by=0$ $(a>0,\ b>0)$ に至る距離の積が一定値 k^2 $(k \neq 0)$ である点Pの軌跡は，l, m を漸近線とする 2 本の共役な双曲線である．これを証明せよ．

(2)　方程式 $(x-y)(x+3y)=\sqrt{20}$　………　①

の表す図形は何か．

アプローチ　漸近線を共有する $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ を共役な双曲線といいます．

解答　(1)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から

l に至る距離 $d_l=\dfrac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

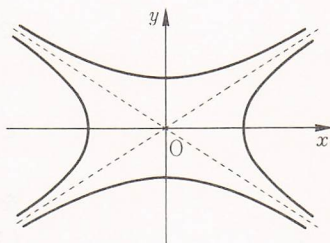
m に至る距離 $d_m=\dfrac{|ax-by|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

となるので

$$d_l \cdot d_m = k^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|a^2x^2-b^2y^2|}{a^2+b^2}=k^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{\dfrac{k^2(a^2+b^2)}{a^2}}-\frac{y^2}{\dfrac{k^2(a^2+b^2)}{b^2}}=\pm 1$$

したがって，点Pは，$y=\pm\dfrac{a}{b}x$ すなわち l, m を漸近線とする 2 本の共役な双曲線を描く．■

(2)　与えられた方程式①は

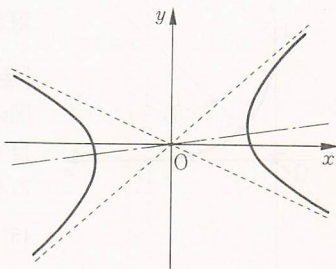
$$\begin{cases} \dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{|x+3y|}{\sqrt{10}}=1 & \cdots\cdots\cdots\ ② \\ (x-y)(x+3y)>0 & \cdots\cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

と同値である．

②は，点 $(x,\ y)$ から 2 直線

$l: x-y=0$, $m: x+3y=0$

への距離の積が 1 に等しいことを意味する．

したがって，①が表す図形は，**l, m を漸近線とする共役な双曲線の③を満たす方** である．

B.721

(1) 点 $A\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を焦点とし，直線 $l:x+y=0$ を準線とする放物線の方程式を求めよ．

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の表す図形は放物線の一部であることを示せ．

アプローチ (1)は，放物線の定義に戻れば簡単でしょう．

解答 （１） $P(x,\ y)$ がAと l から等距離にあるための条件は

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$$

である．これは，両辺を平方した式

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{2}$$

と同値であるので，これを整理して，求める方程式

$$\boldsymbol{x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を得る．

（２） $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ ……… ②

$$\iff \begin{cases} y=(1-\sqrt{x})^2 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ x\leqq 1 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

実数 A，B について ▶ $\sqrt{A}=B \iff \begin{cases} A=B^2 \\ B\geqq 0 \end{cases}$

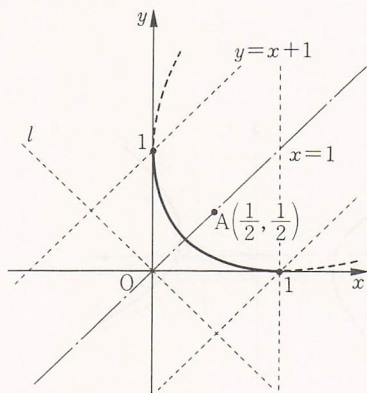
であり，③を計算すると，

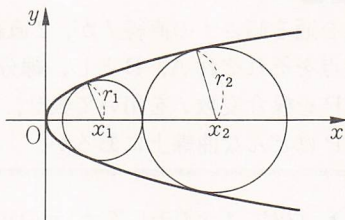
$$2\sqrt{x}=1+x-y \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

となる．さらに

$$③' \iff \begin{cases} 4x=(1+x-y)^2 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \\ 1+x-y\geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

であり，⑤を計算すると，①が得られるので，②が表す図形は，放物線①の，④かつ⑥という条件で制限された部分である．■

［注］ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される図形の概形は，左図のようになる．放物線①の準線と焦点の距離に注目すれば①は，放物線 $x^2=\sqrt{2}\,y$ を移動したものであるはずである．実際，放物線①を原点のまわり45°回転すると，$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となることは，知られている．

B.722

右図のように x 軸上に中心をもち，放物線 $y^2=ax$ $(a>0)$ に頂点O以外の点で内接し，かつ互いに外接する2円がある．これら2円の半径 r_1，r_2 の差は a であることを証明せよ．

アプローチ▶ 放物線と円の方程式を連立させ，y を消去します．

解答 点 $(x_1,\ 0)$ を中心とする半径 r_1 の円

$$(x-x_1)^2+y^2=r_1^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が，放物線 $y^2=ax$ ………②

と図のように原点以外の点で接するのは，①，②から y を消去した x の2次方程式

$$x^2-(2x_1-a)x+x_1^2-r_1^2=0$$

が正の重解をもつときである．

◀ $x>0$ でないと，②を満たす y の実数値が2つ出てこない．

よって，その条件は，

$$\begin{cases} 判別式=(2x_1-a)^2-4(x_1^2-r_1^2)=0 & \cdots\cdots\cdots ③ \\ 重\quad解=(2x_1-a)/2>0 & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

◀ 以下の議論には不必要となる．

であり，③を整理すると，

$$-4ax_1+a^2+4r_1^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

となる．同様に，点 $(x_2,\ 0)$ を中心とする半径 r_2 の円が，放物線②と接するための条件は，

$$-4ax_2+a^2+4r_2^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

◀ ⑤かつ $2x_2-a>0$ が図のように接するための条件となる．

となる．そこで，③′−⑤を作ると，

$$4a(x_2-x_1)-4(r_2-r_1)(r_1+r_2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

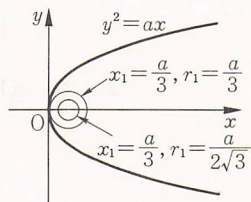
となるが，2円が外接することから，

$$x_2-x_1=r_1+r_2\neq 0$$

◀ $d=r_1+r_2$

であるので，⑥の両辺を $4(x_2-x_1)$ で割り，

$$a=r_2-r_1 \quad を得る．■$$

［注］ ①，②が接する条件③は，原点で接する場合には通用しない．たとえば，$x_1=r_1=a/3$ のときは，①，②は原点で接するが，判別式 $=a^2/9\neq 0$．一方，$x_1=a/3$，$r_1=a/2\sqrt{3}$ とすると，判別式 $=0$ だが，①，②は共有点すらもたない．

B. 723

原点を通る傾き t の直線 l が，2直線 $m：x+y-4=0$，$n：x-y-4=0$ と交わる点をそれぞれ A，B とし，線分 AB の中点をPとする．

(1) Pを媒介変数 t を用いて表せ．

(2) Pはどんな曲線上にあるか．

アプローチ (2)は，t を消去して x，y の式に直しましょう．

解答 (1) l を表す方程式は，$y=tx$ であるから，l と m の交点Aは，連立方程式 $\begin{cases} y=tx \\ x+y-4=0 \end{cases}$ を解いて．

$\left(\dfrac{4}{1+t},\ \dfrac{4t}{1+t}\right)$ となる．同様に $B\left(\dfrac{4}{1-t},\ \dfrac{4t}{1-t}\right)$ であるのでPの座標は

$$x=\left\{\frac{4}{1+t}+\frac{4}{1-t}\right\}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{1-t^2}$$

$$y=\left\{\frac{4t}{1+t}+\frac{4t}{1-t}\right\}\times\frac{1}{2}=\frac{4t}{1-t^2}$$ で得られる．

$$\mathbf{P}\left(\frac{4}{1-t^2},\ \frac{4t}{1-t^2}\right)$$

(2) $x=\dfrac{4}{1-t^2}$ より $x(1-t^2)=4$

$$\therefore\ xt^2=x-4$$

$x\fallingdotseq 0$ ではないから…

$x \neq 0$ であるから　$t^2=\dfrac{x-4}{x}$ ………①

また，点Pは l 上の点であるから，$y=tx$ を満たす．$x\neq 0$ より

$$t=\frac{y}{x} \quad\text{………②}$$

②を①に代入して　$\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{x-4}{x}$

$$xy^2=x^2(x-4)$$

$x\neq 0$ より　$y^2=x^2-4x$

$$(x-2)^2-y^2=4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \quad\text{………③}$$

よって，点Pは③で表される双曲線上にある．

B. 724

円 C：$x^2+y^2=9a^2$ と円 C′：$(x-2a)^2+y^2=a^2$ がある．C′がCに接しながら滑ることなく反時計回りに1周して元の位置に戻るものとする．このとき，円C′の中心と原点を結ぶ線分の x 軸の正方向となす角を θ として，円C′上の定点 $\mathrm{A}(3a,\ 0)$ の描く曲線の方程式を，媒介変数 θ を用いて表せ．

アプローチ C′の中心をO′，CとC′の接点をTとし，Aのはじめの位置を $\mathrm{A_0}$ とすると，2つの円C，C′において，$\overset{\frown}{\mathrm{A_0T}}=\overset{\frown}{\mathrm{AT}}$ です．

解答 円Cにおいて，$\overset{\frown}{\mathrm{A_0T}}=3a\theta$，円C′において $\angle\mathrm{AO'T}=\alpha$ とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=a\alpha$ であるから $\alpha=3\theta$ と表される．　◀ 弧の長さ$=r\theta$

よって，O′Aと x 軸の正方向とのなす角は，

$\theta-\alpha=\theta-3\theta=-2\theta$ であるから

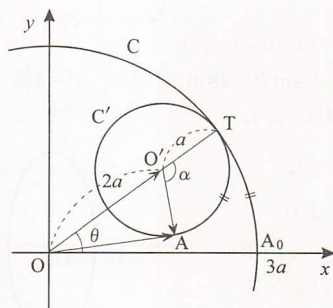
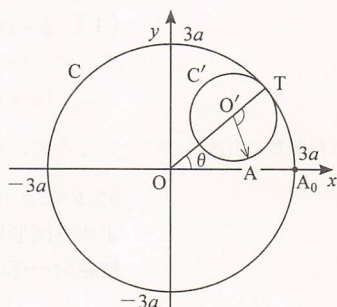
$$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=(a\cos(-2\theta),\ a\sin(-2\theta))$$
$$=(a\cos2\theta,\ -a\sin2\theta)$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=(2a\cos\theta,\ 2a\sin\theta)$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$$
$$=(2a\cos\theta+a\cos2\theta,\ 2a\sin\theta-a\sin2\theta)$$

よって，$\mathrm{A}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=2a\cos\theta+a\cos2\theta} \\ \boldsymbol{y=2a\sin\theta-a\sin2\theta} \end{cases}$$

研究 この曲線のことを，内サイクロイドという．
また，円Cの外側に円C′をかいたときに得られる曲線を，外サイクロイドという．

B.725

点 $(s,\ t)$ が原点を中心とする半径1の円周上を動くとき，

(1)　$x=s+t+st$，$y=s+t$ で表される点 $(x,\ y)$

(2)　$x=s^2-t^2$，$y=4st$ 　　　で表される点 $(x,\ y)$

のえがく図形をそれぞれ求め，xy 平面上に図示せよ．

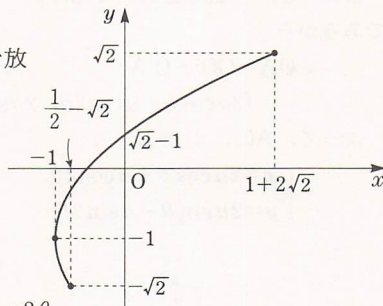
アプローチ　媒介変数を直接消去することはできません．そこでまず，媒介変数をひとつに減らすことから始めます．

解答　点 $(s,\ t)$ は，円 $x^2+y^2=1$ 上の点なので，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表すことができる．

（1）　$y=\cos\theta+\sin\theta$，$x-y=\cos\theta\sin\theta$ と表すことができるので，$y^2=1+2(x-y)$

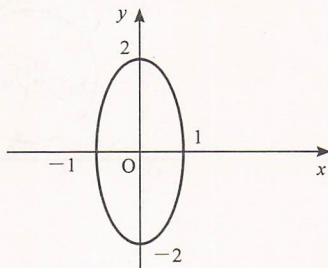
　$\therefore$　$(y+1)^2=2(x+1)$

三角関数の合成 ▶　ところで，$y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形でき，

$0\leqq\theta<2\pi$ であることから，求める図形は，右図のような放物線の一部になる．

倍角の公式 ▶　（2）　$\begin{cases} x=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta \\ y=2\cdot 2\cos\theta\sin\theta=2\sin 2\theta \end{cases}$　$\therefore$　$y^2=4(1-\cos^2 2\theta)$

であるから，$y^2=4(1-x^2)$，

すなわち　$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$．

また，$0\leqq 2\theta<4\pi$ より $-1\leqq x\leqq 1$ であるから，求める図形は，右図のような楕円になる．

研究　$s^2+t^2=1$ という条件を用いて，s，t を消去してももちろんかまわない．その場合，(1)の変域には注意しなければならない．$s+t=y$，$st=x-y$ より，s，t は2次方程式 $X^2-yX+(x-y)=0$ の2つの実数解であるので，その判別式が0以上となる条件から変域を導く．

B. 726

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ ………①

上の任意の点をPとする．このとき，1つの焦点F$(ae,\ 0)$からPへ向かう動径OPの，x軸からの回転角をθとし，FからPに至る距離をrとおくと，

$$r=\frac{c}{1+e\cos\theta}\ (c：定数)\ （楕円の極方程式）$$

が成り立つことを示せ．

アプローチ 点Pの座標を，r，θを用いて表します．

解答 P$(x,\ y)$とおくと，r，θの定義より，

$$\begin{cases} x=ae+r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

また，$ae=\sqrt{a^2-b^2}$ より，$b^2=a^2(1-e^2)$ である．

これらを，①式に代入し整理すると，

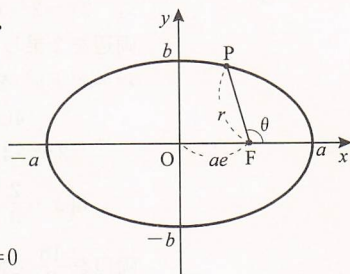
$$(1-e^2\cos^2\theta)r^2+2ae(1-e^2)\cdot\cos\theta\cdot r-a^2(1-e^2)^2=0$$

$$\{(1+e\cos\theta)r-a(1-e^2)\}\{(1-e\cos\theta)r+a(1-e^2)\}=0$$

$a>0$，$0<e<1$ に注意して，$r>0$ の方をとると，

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

ここで，$a(1-e^2)$ は定数なので，c とおくと

$$r=\frac{c}{1+e\cos\theta}\ ∎$$

別解 楕円の定義に戻って考えれば，もっと簡単に求めることもできます．

もうひとつの焦点をF$'(-ae,\ 0)$とすると，楕円の定義により，

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$$

$$\therefore\quad \mathrm{PF}'=2a-\mathrm{PF}$$

ところで，P$(ae+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$であることから，PF$=r$，

$$\mathrm{PF}'=\sqrt{(r\cos\theta+2ae)^2+(r\sin\theta)^2}=\sqrt{r^2+4aer\cos\theta+4a^2e^2}$$

よって，これらを $\mathrm{PF}'^2=(2a-\mathrm{PF})^2$ に代入し，r について解くと，

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\ が得られる．$$

B.727

極方程式 $r(2+\cos\theta)=2$ で表される図形を，直交座標の方程式になおして答えよ．

アプローチ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ で直交座標におきかえます．そのとき，$r^2=x^2+y^2$ であることを忘れないで下さい．

解答 $r(2+\cos\theta)=2$ より $2r+r\cos\theta=2$

ここで，$x=r\cos\theta$ であるから，$2r+x=2$ とおける．

$\therefore\quad 2r=2-x$

両辺を2乗して，$4r^2=4-4x+x^2$

$r^2=x^2+y^2$ を代入して

$$4(x^2+y^2)=4-4x+x^2$$

$$3x^2+4x+4y^2=4$$

$$3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+4y^2=\frac{16}{3}$$

両辺を $\dfrac{16}{3}$ で割ると

$$\boldsymbol{\frac{9}{16}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，求める曲線は，$(*)$ で表される楕円である．

研究 方程式$(*)$は，極を原点に，始線を x 軸の正の部分にとったときの，直交座標の方程式ですが，前問の楕円の極方程式

$$r=\frac{c}{1+e\cos\theta}\ (0<e<1)$$

にあてはまるので，楕円を表していることがわかります．

楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と対比すると $(a>b>0)$

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\quad c=a(1-e^2)$$

ですから，$b^2=\dfrac{4}{3}$，$a^2=\dfrac{16}{9}$ が導かれ，極を焦点 $(ae,\ 0)=\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ とし，始線を $x\geqq\dfrac{2}{3}$ の x 軸と考えると，$\dfrac{9}{16}x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1$ と表される楕円となります．これは，$(*)$ を x 軸方向に $-\dfrac{2}{3}$ に平行移動したときに得られる方程式です．

B.728

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点Pに対し，点Qを，$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ となるようにこの楕円上にとる．このとき，

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}$$

は一定であることを示せ．

アプローチ 極座標を用いて解けば，簡単です．

解答 $\mathrm{OP}=r$，OP が x 軸の正方向となす角を θ とすると，点Pの座標は，$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表される．これを楕円の方程式に代入すると，

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

よって，$\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$

また，$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ より，$\mathrm{OQ}=r'$ とすれば，点Qの極座標は $(r',\ \theta+90^\circ)$ となり，同様にして

$$\frac{1}{r'^2}=\frac{\cos^2(\theta+90^\circ)}{a^2}+\frac{\sin^2(\theta+90^\circ)}{b^2}$$

◀ Qの極座標を $(r',\ \theta-90^\circ)$ ととっても結果は同じになります．

となる．ここで，$\cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta$，$\sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta$ であることから，

$$\frac{1}{r'^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}$$

従って，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}=\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r'^2}$

$$=\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ (\text{一定})\ ■$$

B.729

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ ………①

上の任意の点をPとする．このとき，1つの焦点F$(ae,\ 0)$からPへ向かう動径FPの，x軸からの回転角をθとし，FからPに至る距離をrとすると，

$$r=\frac{C}{\pm1+e\cos\theta}\ (C：ある定数)$$

が成り立つことを示せ．

アプローチ B.726と同様に考えましょう．

解答 点P$(x,\ y)$とおくと，r，θの定義より

$$\begin{cases} x=ae+r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

また，$ae=\sqrt{a^2+b^2}$ より，$b^2=a^2(e^2-1)$ である．

これらを①式に代入して整理すると，

$$(e^2\cos^2\theta-1)r^2+2ae(e^2-1)(\cos\theta)r+a^2(e^2-1)^2=0$$

$$\{(e\cos\theta+1)r+a(e^2-1)\}\{(e\cos\theta-1)r+a(e^2-1)\}=0$$

よって

$$r=-\frac{a(e^2-1)}{\pm1+e\cos\theta}$$

ここで，$-a(e^2-1)$は定数なので，これをCとおくと

$$r=\frac{C}{\pm1+e\cos\theta}\ ■$$

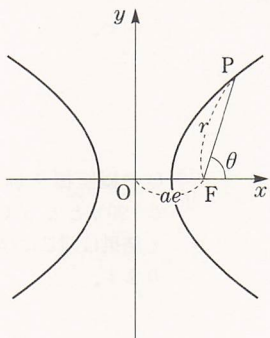
［注］ 双曲線の左半分が

$$r=\frac{C}{1+e\cos\theta},$$

右半分が

$$r=\frac{C}{-1+e\cos\theta}$$

で表される（Cは共通）．

研究 これも，楕円と同様，定義に従って導く方法もあるが，その計算は楕円に委ねることにする．楕円と双曲線の極方程式は，形の上では同じ，$r=\dfrac{C}{1+e\cos\theta}$ となる．

B.730

極方程式 $r(1+2\cos\theta)=3$ で表される図形を，直交座標の方程式に直して答えよ．

アプローチ 解き方は，B.727 の楕円の場合と同じです．

解答 $r(1+2\cos\theta)=3$ より，$r+2r\cos\theta=3$

ここで，$x=r\cos\theta$ であるから，$r+2x=3$

$\therefore\quad r=3-2x$ ………①

両辺を 2 乗して，$r^2=9-12x+4x^2$

$r^2=x^2+y^2$ を代入して

$$x^2+y^2=9-12x+4x^2$$

$$3x^2-12x-y^2=-9$$

$$3(x-2)^2-y^2=3$$

両辺を 3 で割って

$$(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1 \quad ………②$$

ここで $r\geqq 0$ と①より

$$x\leqq\frac{3}{2}$$

よって，求める曲線は，②で表される双曲線のうちの左側である．

研究 これも，前問の極方程式で考えると，

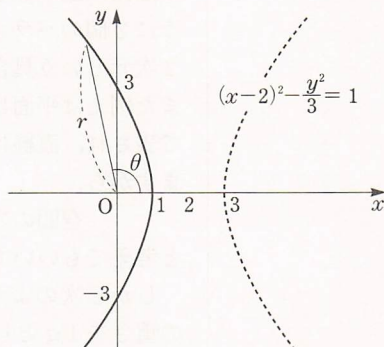
$$r=\frac{C}{1+e\cos\theta}\ (e：離心率)$$

において，$e>1$ の場合で，双曲線を表していることがわかります．

双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ と対比すると $(a>0,\ b>0)$

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\ C=a(e^2-1)$$

ですから，$b=\sqrt{3}$，$a=1$ が得られ，極を焦点 $(-ae,\ 0)=(-2,\ 0)$ とし，始線を x 軸の $x\geqq -2$ の部分と考えたとき，$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ と表される双曲線の左半分となります．

Repos

次元とは何か

座標空間の中で直線や曲線の上の点を表すには $(x(t),$ $y(t),\ z(t))$ のように1個のパラメタ t が必要です．また平面や曲面の上の点を表すには $(x(s,\ t),\ y(s,\ t),\ z(s,\ t))$ のように2個のパラメタ $s,\ t$ が必要です．曲線は1次元，曲面は2次元という具合にパラメタの数のことを次元といいます．また例えば平面は $ax+by+cz=d$ という形の1個の方程式で表され，直線は2平面の交線として2個の方程式で表されますから，

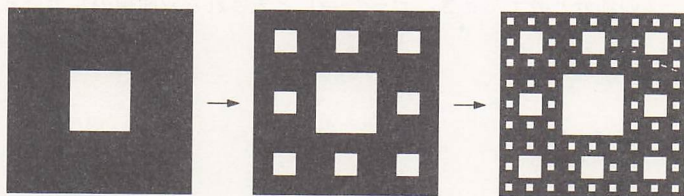
空間の次元(＝3)－方程式の数 ＝ 図形の次元

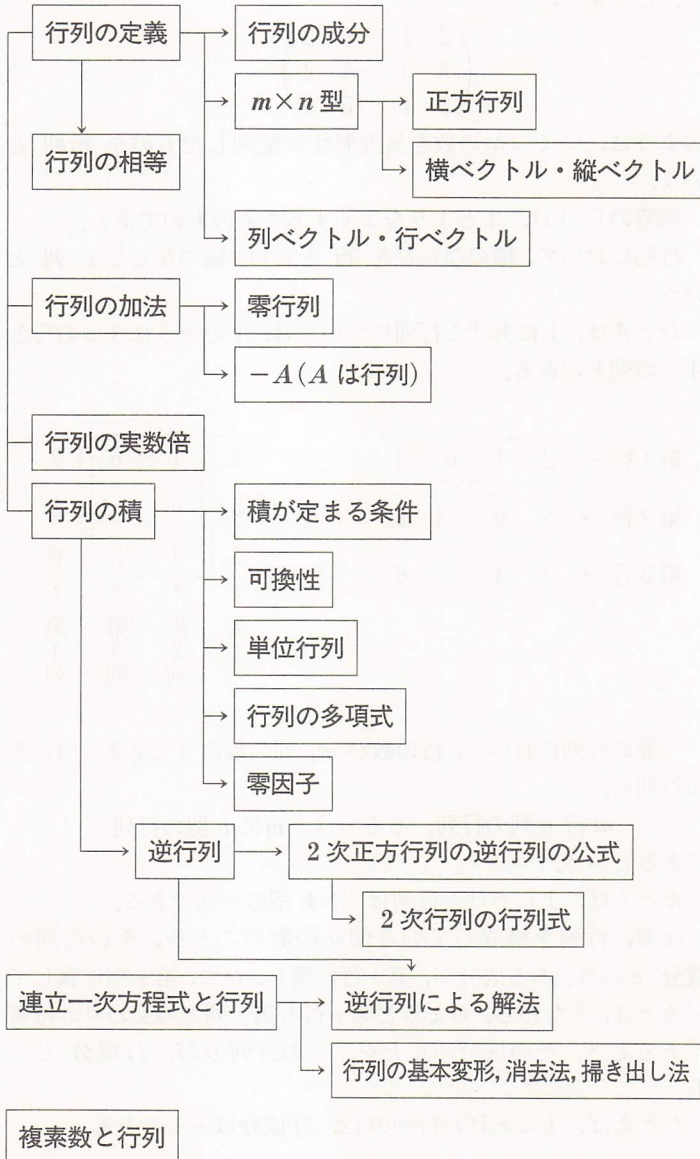
と考えてもいいでしょう．

しかし次のようなことも考えられます．いま1 cm の線分の重さを1 g としましょう．すると L cm の線分の重さは L g です．また1辺が1 cm である正方形の重さを1 g とすれば，1辺が L cm である正方形の重さは L^2g です．このように長さの単位で測った図形の大きさ(1辺の長さや直径など)を L cm，重さの単位で測った図形の大きさを M g として

$$M=定数\times L^d \quad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つときこの図形は d 次元であるというのです．

さて次のような穴あけパンチの極限として得られる図形は2次元というにはスカスカで1次元というには太りすぎです．この図形は“1辺の長さ”を3倍にすると“重さ”は8倍になりますから，(1)に合わせると次元 d は $\log 8/\log 3=1.892\cdots\cdots$ ということになります．非整数次元を持つ図形……神秘的ですね．

§8 行列と線型計算

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）

A8.1　行列の定義

すでに教科書で学んでいると思うが，行列の定義から始めよう．たとえば，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

のように，いくつかの数を長方形状に配列したものを **行列** という．

両脇の（　）は，まとまりをよくするためのものである．

行列において，横のならびを **行** といい，縦のならびを **列** という．

たとえば，上にあげた行列については，下のように3つの行と4つの列とがある．

一般の行列において，行の数が m，列の数が n であるとき，その行列は，

m 行 n 列の行列，あるいは，**$m\times n$ 型の行列**

であるという．

たとえば，上にあげた行列は 3×4 型の行列である．

なお，行列を構成している個々の数のことを，その行列の **成分** という．ある成分が，第 i 行に属し，かつ，第 j 列に属しているとき，すなわち，ちょうど第 i 行と第 j 列との交わりの位置にあるとき，その成分のことを，その行列の **$(i,\ j)$ 成分** という．

たとえば，上にあげた行列の $(2,\ 3)$ 成分は -1 である．

1° 行列を1つのものとして扱うときには，A，B などの文字で表す．たとえば，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

行列Aは 3×3 型の行列であり，行列Bは 2×3 型の行列である．

2° 行列の外国名は，matrix [英]，matrice [仏]，Matrix [独] などであるが，これを行列と訳したのは，数学者で最初に文化勲章を受けた高木貞治であるとされている．matrix [英] は本来，鋳物(いもの)をつくるときの母型，すなわち鋳型の意味である．

行と列は間違えやすい．その記憶術として，行と列の“つくり”に横線，縦線がそれぞれ2本ずつあるのに注目するのが便利だという説がある．

行………ヨコの並び　　列………タテの並び

[注意] 読者諸君は「行にはタテの並びもある」などと決して揚げ足をとってはならない．

3° 行の数と列の数とが一致する行列を **正方行列** という．

言い換えると，正方行列とは $m\times m$ 型の行列である．$m\times m$ 型の正方行列のことを **m 次正方行列** という．

高校で，実際に演算らしい演算を行う行列は，主に2次の正方行列である．

したがって高校での行列の主役は，a，b，c，d を数を表す文字として，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で表される 2×2 型の正方行列，すなわち，2次正方行列である．

4° 行列の成分のことを，行列の **要素** という流儀もあるが，高校では用いない．

A 8.2 横ベクトル・縦ベクトル

数学Bで述べたことの再現になるが，行列の立場から横ベクトル，縦ベクトルを規定しなおそう．

1つの行から成る行列を **横ベクトル** という．すなわち，横ベクトルとは，$1\times n$ 型の行列である．n をこの横ベクトルの **次元** という．

たとえば，

$(2\ \ 1\ \ 6\ \ 0)$ は 4次元の横ベクトル，

$(-1\ \ 1)$ は 2次元の横ベクトル．

一方，1つの列から成る行列を **縦ベクトル** という．すなわち，縦ベクトルとは，$m\times 1$ 型の行列のことである．m をこの縦ベクトルの **次元** という．

たとえば，

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ は4次元の縦ベクトル，　$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は2次元の縦ベクトル．

行列Aが与えられたとき，ある行，たとえば，第i行を取り出せば1つの横ベクトルが得られる．これを行列Aのi番目の **行ベクトル** という．

同様に，第j列を取り出して得られる縦ベクトルを，その行列のj番目の **列ベクトル** という．

$m\times n$ 型の行列の行ベクトルはm個あり，列ベクトルはn個ある．

A 8.3 行列の相等

2つの行列 A，B が等しいとは，

「AとBの型が一致し，かつ，

対応する成分がそれぞれ等しい」

ことであると定義する．

たとえば,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=0,\ d=3$$

$A=B$ でないとき, $A \neq B$ と書く.

1° 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^0 & \sqrt{4} \\ \log_2 8 & 2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2° 2つの横ベクトルが等しいのは, 次元が一致し, しかも対応する成分のそれぞれが等しいときである. 縦ベクトルについても同様である.

A 8.4 行列の加法

I. 行列の和

2つの行列 A, B の和 $A+B$ は, A とBの型が一致するときにのみ定義され, その成分はA, B の成分を成分ごとに加えることによって得られる.

たとえば,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

ならば

$$A+B=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

である.

また, たとえば,

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}$$

ならば

$$C+D=\begin{pmatrix} c_{11}+d_{11} & c_{12}+d_{12} & c_{13}+d_{13} \\ c_{21}+d_{21} & c_{22}+d_{22} & c_{23}+d_{23} \end{pmatrix}$$

である.

このような行列の加法については，公式

$$A+B=B+A \qquad \text{(交換法則)}$$
$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \text{(結合法則)}$$

が成り立つ．

1° 行列の和の特別の場合として考えると，2つの縦ベクトルの和は，両方の次元が一致する場合にのみ定義され，成分ごとの和を作ることによって縦ベクトルの和が得られる．横ベクトルについても同様．

2° 行列についても $(A+B)+C=A+(B+C)$ のことを単に $A+B+C$ と書く．

II．零 行 列

成分が0ばかりである行列を零行列という．零行列はOと書くことが多い．

たとえば，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は 2×2 型の零行列(2次正方零行列)

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は 2×3 型の零行列

である．

Oを零行列とするとき，Oと同じ型の任意の行列Aに対して，

$$A+O=A, \quad O+A=A$$

が成り立つ．

III．行列の差

A, Bが同じ型の行列であるとき，成分ごとにAの成分からBの成分を引いて得られる行列を $A-B$ と書き，AからBを引いた差という．

たとえば，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

ならば

$$A-B=\begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

また，たとえば

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}$$

ならば

$$C-D=\begin{pmatrix} c_{11}-d_{11} & c_{12}-d_{12} & c_{13}-d_{13} \\ c_{21}-d_{21} & c_{22}-d_{22} & c_{23}-d_{23} \end{pmatrix}$$

与えられた同じ型の行列 A, B に対して,

$$X=A-B \iff X+B=A$$

が成り立つ.

すなわち，行列Xについての方程式 $X+B=A$ の解は

$$X=A-B$$

で与えられることになる.

O を零行列とするとき，行列 $O-B$ は，B の成分の符号を変えて得られる行列に他ならない．これを $-B$ で表す.

たとえば,

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ならば } -X=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

1°　$A-B=A+(-B)$ が成り立つ.

2°　$A-A=O$
　　$A+B+C=O$ ならば，$C=-(A+B)=-A-B$

など，数の場合と同様の計算ができる.

A 8.5　行列の実数倍

k を実数，A を行列とするとき，A を k 倍した行列 kA とは，A の成分をすべて k 倍して得られる行列である．たとえば,

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ならば } kA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ ならば } kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

1°　任意の行列Aに対して

$$1A=A,\quad (-1)A=-A$$

が成り立つ.

2°　O を A と同じ型の零行列とするとき，$0A=O$ が成り立つ．

3°　l を0でない実数とするとき，行列 A に対して $\frac{1}{l}A$ の代りに $\frac{A}{l}$ と書くこともある．

4°　縦ベクトルを行列の特別の場合とみて，縦ベクトル $\vec{u}$ と実数 k とに対して，$\vec{u}$ の k 倍 $k\vec{u}$ を考えれば，ベクトルの実数倍の定義による $k\vec{u}$ と一致する．

横ベクトルについても同様である．

5°　行列の加法と実数倍については，ベクトルの加法と実数倍の場合と同様に，次の公式が成り立つ．

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

ここで，α，β は任意の実数で，A，B は同じ型の行列である．

A 8.6　行列の積の定義

I．横ベクトルと縦ベクトルとの積

横ベクトル X と縦ベクトル Y との積 XY が考えられるのは，X，Y の次元が一致する場合である．そうして，たとえば

$$X=(x_1\quad x_2\quad x_3),\qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

については，積 XY は

$$XY=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

によって定義される．すなわち，同じ次元の横ベクトルと縦ベクトルとの積は対応する **成分どうしの積の和** として得られる実数である．

1°　例　$X=(0\quad 1\quad 2)$，$Y=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$，$Z=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$XY=14,\quad XZ=0$$

である．

II．2次正方行列どうしの積

2つの 2×2 型の行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

の積 AB はやはり 2×2 型の行列であり，

$$AB=\begin{pmatrix} as+bu & at+bv \\ cs+du & ct+dv \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と定義される．

1°　たしかに，上の定義はなじみにくい．①の成分のつくり方で，念をおすと

AB の (1，1) 成分$=(a\quad b)\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$

=[A の1番目の行ベクトル] と
[B の1番目の列ベクトル] との積

AB の (1，2) 成分$=(a\quad b)\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix}$

=[A の1番目の行ベクトル] と
[B の2番目の列ベクトル] との積

である．

(2，1) 成分，(2，2) 成分については読者にまかせよう．

2°　2次正方行列全体の集合は，和，差，および積に関して閉じている．すなわち，たとえば，2次正方行列の全体の集合を M_2 と書くと，

$$A\in M_2,\ B\in M_2 \Longrightarrow A+B\in M_2,\ A-B\in M_2,\ AB\in M_2$$

である．

III．一般の行列の積

一応，一般の場合について行列の積の定義を記しておく．

行列 A，B の積 AB とは，

AB の $(i,\ j)$ 成分=[A の i 番目の行ベクトル] と
[B の j 番目の列ベクトル] との積
$\cdots\cdots\cdots ②$

となっているような行列である．

A の行ベクトルの次元と B の列ベクトルの次元とが一致するときに限り前頁の②の右辺が意味をもち，このときにのみ積 AB が定められる．すなわち，

> 行列 A が $l\times m$ 型で，B が $m\times n$ 型のとき，
> 積 AB が定義され $l\times n$ 型の行列となる．

行列の積が定まる条件

1°　l，m，n のうちに 4 以上のものが含まれている場合の $l\times m$ 型行列と $m\times n$ 型行列との積については，高校では扱わないことになっている．しかし，定義の確認のために次の例を確かめることをすすめる．

例

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

A8.7　行列の積の性質

この節では，2×2 型の行列に限って，行列の乗法についての考察を進める．2×2 型の行列全体を M_2 で表す．

I．乗法の公式

A，B，C を M_2 に属する任意の行列とするとき，ふつうの掛算と同様に

$$(AB)C=A(BC)=ABC \qquad \text{結合法則}$$

$$\left.\begin{aligned} A(B+C)&=AB+AC \\ (A+B)C&=AC+BC \end{aligned}\right\} \qquad \text{分配法則}$$

が成り立つ．

これらは，成分を書いてみれば証明できる．

注意すべきことは，乗法における因数の順序である．すなわち，ふつうの数の掛算とは異なり，

AB と BA とは一般には等しくない($AB \neq BA$).
そこで，特に，

$AB=BA$ が成り立つとき，A，B は **可換** である
という.

1° 例1 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で，$AB \neq BA$ である.

2° AA を A^2 と書く. さらに，

$$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdots\cdots\cdots A}_{n\text{個}}$$

である.

$A^m A^n = A^{m+n}$ (m，n は自然数) が成り立つ.

なお，A^0 は，次に説明する単位行列 E と約束するのが一般的である. こうすると，m や n が0のときも，上の等式が成り立つ.

例2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なら $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$

これから，

$$A^3=A^2A=AA=A^2=A,$$

一般に， $A^n=A$ である.

3° 2次正方行列 A を与えて，A^n を求めさせる問題は，受験数学においてエスカレート気味である.

ガイド☆ この種の問題例は ☞ B.806，B.811

II. 単位行列

正方行列で，左上のすみから右下のすみにいたる対角線上の成分がすべて1で，その他の成分がすべて0である行列を **単位行列** という. たとえば，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は2次の単位行列，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は3次の単位行列

単位行列を E，または I で表す.

A を任意の M_2 に属する行列，E を2次の単位行列とすると，

$$AE=EA=A$$

が成立する．すなわち，E は行列の乗法に関する単位元である．

1°　単位行列を表す文字として I を用いるのは identity matrix [英]＝恒等行列 から来ている．E を用いるのは Einheit [独]＝単位元 にもとづいている．

例　A は任意の2次正方行列，E は2次の単位行列であるとするとき，等式

$$(E+A)(E-A)=E-A^2$$

が成り立つ．

Ⅲ．行列の多項式

A を2次正方行列とし，E を2次の単位行列とする．このとき，実数係数の x の多項式

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

に対して，x に A を代入した $P(A)$ とは，

$$P(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}A+a_nE$$

で定義される行列のことである．

Ⅳ．零 因 子

行列の場合には，$A\neq O$, $B\neq O$ であっても，$AB=O$ となることがある．たとえば

$$A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

とおけば

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

になる．

$A\neq O$, $B\neq O$ であって $AB=O$ のとき，A, B を **零因子** という．

Ⅴ．行列の積と実数倍との関係

A, B が M_2 にぞくし，k が実数ならば，

$$(kA)B=A(kB)=k(AB)$$

が成り立つ．

A 8.8　行列の演算の公式のまとめ

I．行列の演算の基本公式

行列の演算の公式で今までに現われたもののうち，大切なものをまとめておこう．

1)　$A+B=B+A$
2)　$(A+B)+C=A+(B+C)$
3)　$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
4)　$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
5)　$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
6)　$(-\alpha)A=\alpha(-A)=-\alpha A$

和，差，実数倍についての性質
[A，B，C は同じ型の任意の行列で，α，β は任意の実数]

1)　$(AB)C=A(BC)$
2)　$(\alpha A)(\beta B)=(\alpha\beta)AB$
3)　$A(B+C)=AB+AC$
4)　$(A+B)C=AC+BC$

これらの等式は左右両辺の一方が意味をもてば，他方も意味をもって等しいことを示す．

積についての性質
[A，B，C は行列，α，β は実数]

1)　$A+O=A$　　2)　$A-A=O$
3)　$O-A=-A$　　4)　$0A=O$
5)　AO が存在すれば $AO=O$
　　OA が存在すれば $OA=O$

零行列の性質
[A は 1)～4) では O と同じ型の任意の行列]

1)　$A^{n+1}=A^nA$　　2)　$A^{m+n}=A^mA^n$
3)　$A^0=E$
4)　AE が存在すれば $AE=A$
　　EA が存在すれば $EA=A$

累乗と単位行列
[A は 1)～3) では正方行列．m，n は正整数]

Ⅱ．ケーリー・ハミルトンの定理

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

ただし，E は単位行列，O は零行列である．

1°　成分を計算することにより，$(*)$ を確かめることができる．

（☞B.804）

A8.9　逆　行　列

Ⅰ．逆行列の定義

たとえば，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ に対して，} X=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$AX=XA=E \quad (E \text{ は単位行列})$$

が成り立つ．このように，与えられた正方行列 A に対して

$$AX=XA=E$$

を満たす（A と同じ次数の）正方行列 X を A の逆行列といい，A^{-1} で表す．

すなわち，

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

逆行列の定義と記号

正方行列 A の逆行列は存在するとは限らないが，存在する場合には１つだけである．

A^{-1} の逆行列は A である．
すなわち，

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

逆行列の逆行列

1°　例1　$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ なら，$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2°　例2　$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ には，A^{-1} がない．

実際，$A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$ であったとして，$AA^{-1}=E$ の成分を書いてみると

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+u & y+v\\ x+u & y+v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

これが成立するためには，

$$x+u=1,\ x+u=0,\ y+v=0,\ y+v=1$$

これら4つの等式を満たす数 x，y，u，v は存在しない．

3°　2次正方行列Aに対し，A^{-1} を表す公式についてはⅡで述べる．3次以上の正方行列の逆行列を与える公式は高校では扱わない．

4°　行列Aにおいて逆行列 A^{-1} が存在するとき，A は **正則** な行列であるという習慣であったが，最近ではAは **可逆** な(invertible)行列であるということもある．

Ⅱ．2次正方行列の逆行列の公式

2×2 型の行列の逆行列の存在の条件，およびその具体的な形については，次の定理が成り立つ．

[定理]　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対して，$\varDelta=ad-bc$ とおくとき，

1)　$\varDelta\neq 0$ ならば

$$A^{-1}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

2)　$\varDelta=0$ ならば A^{-1} は存在しない．

逆行列の存在条件と逆行列の具体形

1°　証明については ☞ B.804

2°　例1　$A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ ならば，$\varDelta=4\cdot3-5\cdot(-1)=17$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{17} & -\frac{5}{17}\\ \frac{1}{17} & \frac{4}{17}\end{pmatrix}$$

例2　$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ ならば，$\varDelta=3\cdot4-(-2)(-6)=0$

よって，A^{-1} は存在しない．

3°　$\varDelta\neq0$ のときの A^{-1} の具体形を書き表す上の公式は，記憶できるならそれにこしたことはない．公式を忘れても，A が数値的に与えられたとき，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \text{ とおいて}$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から x，y，u，v を解いて A^{-1} を求める能力も大切である．

4°　大学に入ってから学ぶ数学の立場からいえば，上の $\varDelta$ は行列 A の行列式 (determinant) とよばれ，$\det A$ と書かれる量である．

2次行列の行列式

[定義]　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は

$$\det A=ad-bc$$

前頁の定理によれば，正方行列 A について，

A^{-1} の存在条件

[定理]　“A^{-1} が存在する

$\iff$ A の行列式 $\det A\neq0$”　……　☆

じつは，3次以上の正方行列 A に対しても，行列 A の行列式というものを考えることができて，やはり，上の☆が成立するのであるが，高校では扱わない．

5°

行列の積の逆

[定理]　A，B の逆行列 A^{-1}，B^{-1} が存在すれば，$(AB)^{-1}$ も存在して

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

である．

実際，$T=AB$，$S=B^{-1}A^{-1}$

とおけば

$$TS=(AB)(B^{-1}A^{-1})=A\{B(B^{-1}A^{-1})\}=A\{(BB^{-1})A^{-1}\}$$
$$=A(EA^{-1})=AA^{-1}=E$$

同様に　$ST=E$　　$\therefore$　$S=T^{-1}$

注意　一般には $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$ である．

A8.10　複素数と行列

単位行列 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と行列 $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を用いて

$$aE+bJ=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\quad (a,\ b \text{ は定数})$$

と表される行列の全体 K について考えてみよう．

K に属する2つの行列 $A=aE+bJ$，$B=cE+dJ$ に対して

和，差　$A\pm B=(a\pm c)E+(b\pm d)J$

も K に属する．また，$J^2=-E$，$JE=EJ=J$ が成り立つ（計算で確かめてみよ）から

$$AB=(aE+bJ)(cE+dJ)=(ac-bd)E+(ad+bc)J$$
$$BA=(cE+dJ)(aE+bJ)=(ac-bd)E+(ad+bc)J$$

となり，可換な積 $AB=BA$ も K に属する．

また，$B'=cE-dJ$ とおくと，$BB'=B'B=(c^2+d^2)E$ となるので，$B\neq O$ つまり，$c=d=0$ ではないとき，B^{-1} が存在し

$$B^{-1}=\frac{1}{c^2+d^2}B'=\frac{c}{c^2+d^2}E-\frac{d}{c^2+d^2}J$$

が K に属することがわかる．よって

商　$AB^{-1}=(aE+bJ)\left(\dfrac{c}{c^2+d^2}E-\dfrac{d}{c^2+d^2}J\right)$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}E+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}J$$

もやはり，K に属する．

ここに示された $A\pm B$，AB，AB^{-1} の計算は J^2 を $-E$ と置き換える点で，i^2 を -1 と置き換えて実行される複素数の計算，すなわち $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ に対する公式：

和，差　$\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)i$

積　$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$

商　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$

の計算と全く平行である．

複素数 $z=x+yi$ に対して，K の行列 $xE+yJ=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$ を対応させる写像を f とする．すなわち，

$f(z)=xE+yJ=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ とすると，f により一つの複素数に対し，K の行列がもれなく，かつ，一つずつ対応することになる．

さらに，上に示した通り，

$$f(\alpha\pm\beta)=f(\alpha)\pm f(\beta)$$
$$f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$$
$$f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=f(\alpha)\cdot f(\beta)^{-1}$$

が成り立つ．すなわち，K の構造は“四則演算”も含めて複素数のそれを正確に反映している．

1°　$f(1)=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$f(i)=J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．

2°　複素数平面上で，複素数 $z=x+yi$ に対して zi は，0 を中心として z を 90° 回転した点を表すが，座標平面上で

$J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ を位置ベクトルにもつ点は，原点を中心として，$(x,\ y)$ を 90° 回転した点である．

A 8.11　連立1次方程式と行列

I．連立1次方程式の行列による表現

x，y を未知数とする2元連立1次方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．

ここで，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{P}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと，

連立方程式①は

$$A\overrightarrow{X}=\overrightarrow{P} \quad \cdots\cdots ②$$

と簡単に表すことができる．

同様に，x，y，z を未知数とする3元連立1次方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=r \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

に対しても，$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{P}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

とおくと，③はやはり

$$A\overrightarrow{X}=\overrightarrow{P} \quad \cdots\cdots ④$$

と表すことができる．

1°　上の②，④をそれぞれ連立方程式①，③の行列による表現といい，いずれの場合にもAをその係数行列と呼ぶ．

連立方程式①，③を解くとは，A，$\overrightarrow{P}$ が与えられたとして，②，④をみたす未知ベクトル$\overrightarrow{X}$を求めることに他ならない．

II．逆行列による解法

連立１次方程式 $A\overrightarrow{X}=\overrightarrow{P}$ の解は，係数行列Aが逆行列 A^{-1} をもつならば，

$$\overrightarrow{X}=A^{-1}\overrightarrow{P}$$

である．

逆行列による解の表示

1°　この事実を証明する．

$A\overrightarrow{X}=\overrightarrow{P}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，

$$A^{-1}(A\overrightarrow{X})=A^{-1}\overrightarrow{P}$$

となるが，左辺は結合法則により

$$A^{-1}(A\overrightarrow{X})=(A^{-1}A)\overrightarrow{X}=E\overrightarrow{X}=\overrightarrow{X}$$

となるから，

$$\overrightarrow{X}=A^{-1}\overrightarrow{P}$$

が導かれる．

逆に，$A\overrightarrow{X}=\overrightarrow{P}$ の左辺に $\overrightarrow{X}=A^{-1}\overrightarrow{P}$ を代入すると，

$$A(A^{-1}\overrightarrow{P})=(AA^{-1})\overrightarrow{P}=E\overrightarrow{P}=\overrightarrow{P}$$

となり，確かに方程式が成り立つ．

2°　2元連立方程式①のおいて，係数行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列 A^{-1} をもつ条件は，$\det A=ad-bc\neq 0$ であるから，この条件のもとで，①の解は

$$\overrightarrow{X}=A^{-1}\overrightarrow{P}\ \text{つまり}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

である．

3元連立1次方程式③においては，係数行列Aの逆行列 A^{-1} が存在しても，具体的に A^{-1} を求める計算は楽ではないので，普通は，以下で述べる消去法や掃き出し法で解くことになる．

3°　連立方程式①，③いずれにおいても，係数行列Aの逆行列 A^{-1} が存在すれば，解は $\overrightarrow{X}=A^{-1}\overrightarrow{P}$ ただ1つである．

一方，A^{-1} が存在しないときには，解がないか，そうでなければ，無数にあるかのいずれかである．(☞ B.812)

例として

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -4x+6y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+6y=-2 \end{cases}$$

をあげると，左の連立方程式の解はないが，右の連立方程式は無数の解 $x=3t+2,\ y=2t+1$ (t は任意の実数)をもつ．

A 8.12 消去法と行列の基本変形

まず，3元連立1次方程式

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ 3x+y+24z=76 & \cdots\cdots ② \\ 2x-y+12z=42 & \cdots\cdots ③ \end{cases}
$$

を同値性に留意して解いていこう．

$$
(\mathrm{II})\begin{cases} & x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ ②-①\times 3: & 7y+15z=31 & \cdots\cdots ④ \\ & 2x-y+12z=42 & \cdots\cdots ③ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{III})\begin{cases} & x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ & 7y+15z=31 & \cdots\cdots ④ \\ ③-①\times 2: & 3y+6z=12 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{IV})\begin{cases} & x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ & 7y+15z=31 & \cdots\cdots ④ \\ ⑤\times\frac{1}{3} & y+2z=4 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{V})\begin{cases} x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ y+2z=4 & \cdots\cdots ⑥ \\ 7y+15z=31 & \cdots\cdots ④ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{VI})\begin{cases} & x-2y+3z=15 & \cdots\cdots ① \\ & y+2z=4 & \cdots\cdots ⑥ \\ ④-⑥\times 7 & z=3 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{VII})\begin{cases} ①-⑦\times 3 & x-2y=6 & \cdots\cdots ⑧ \\ ⑥-⑦\times 2 & y=-2 & \cdots\cdots ⑨ \\ & z=3 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{VIII})\begin{cases} ⑧+⑨\times 2 & x=2 & \cdots\cdots ⑩ \\ & y=-2 & \cdots\cdots ⑨ \\ & z=3 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}
$$

前頁の計算において，たとえば(II)の2つの式①，④から，④＋①×3 によって，(I)の②が導かれるから，連立方程式として(I)と(II)は同値である．一般に，このように，1つの式に他の式の定数倍を加えても同値な連立方程式が得られることがわかる．

また，(III)から(IV)のように1つの式に0以外の定数をかけても，さらに(IV)から(V)のように2つの式の順序を入れかえても同値な連立方程式が得られる．

前頁の計算は，x，y，z の係数と右辺の定数項だけに着目して，行列を利用すると，次のように表すことができる．

$$(\mathrm{I})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 3 & 1 & 24 & 76\\ 2 & -1 & 12 & 42\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{II})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 0 & 7 & 15 & 31\\ 2 & -1 & 12 & 42\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{III})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 0 & 7 & 15 & 31\\ 0 & 3 & 6 & 12\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{IV})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 0 & 7 & 15 & 31\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{V})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 7 & 15 & 31\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{VI})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 15\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{VII})'\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{VIII})'\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

すなわち，各行列において，1つの行が1つの方程式を意味し，第1，2，3，4列の成分がそれぞれ x，y，z の係数，右辺の定数を表している．この行列表現においては，上に述べたような連立方程式の同値変形は，

行列の基本変形

(i)　ある行の定数倍を他の行に加える．
(ii)　ある行に0でない定数をかける．
(iii)　2つの行を入れ換える．

という操作に対応する．これらの操作を行列の基本変形という．

結局，3元連立1次方程式を解くとは，係数と右辺の定数を成分とする行列に対して基本変形をくり返して，“簡単な”行列に帰着させることに他ならない．

たとえば，A8.11の連立方程式③において，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p \\ a_2 & b_2 & c_2 & q \\ a_3 & b_3 & c_3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{基本変形}]{} \underset{\text{“簡単な”行列}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p' \\ 0 & 1 & 0 & q' \\ 0 & 0 & 1 & r' \end{pmatrix}} \quad \cdots\cdots(☆)$$

であるとき，解は $x=p'$，$y=q'$，$z=r'$ となる．

1°　連立方程式（Ⅰ）を解くのに，（Ⅰ）から（Ⅲ）においては x を消去した2式④，⑤を導き，さらに（Ⅵ）では y を消去して，z の値を求めている．このような解法を消去法という．

これに対応して，行列表現の（Ⅰ）′ から（Ⅲ）′ においては，第1行の定数倍を第2行，第3行に加えて，第1列の（1，1）成分以外を0としている．また，さらに（Ⅵ）′ から（Ⅶ）′ においては，第3列の（3，3）成分以外を0としている．このようにある列の1つの成分以外を0とすることによって，“簡単”な行列に変形することを掃き出し法という．

2°　すべての連立方程式の行列表現において，基本変形によって得られる“簡単な”行列が（☆）の右側の形の行列，つまり，左側の

3列が3次単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるとは限らない．

左側の3列が3次単位行列にならないきには，連立方程式は，

解を全くもたないか，または，解を無数にもつ

ことになる．（☞ B.812, B.814）

―― A8　おわり ――

B. 801

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -6 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の各項を満たす行列 X，Y を求めよ．

(1)　$2X-A=B$

(2)　$\begin{cases} X-2Y=A & \cdots\cdots\cdots\ ① \\ 2X+\ \ Y=B & \cdots\cdots\cdots\ ② \end{cases}$

アプローチ　たとえば(1)において $X=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ とおき，$2X-A$ の成分を計算した上でXを求めることは，もちろんできますが，…….

解答　(1)　$2X-A=B$ より $2X=A+B$,

$$\therefore\quad X=\frac{1}{2}(A+B)$$

この式の右辺にA，Bの具体形を代入して

$$X=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

(2)　①+②×2，②−①×2 を作って

$$5X=A+2B,\quad 5Y=B-2A$$

$$\therefore\quad X=\frac{1}{5}(A+2B),\quad Y=\frac{1}{5}(B-2A)$$

▶普通の数についての連立方程式 $\begin{cases} x-2y=a \\ 2x+\ \ y=b \end{cases}$ を解くのと同じ．

これらの式の右辺にA，Bの具体形を代入して

$$X=\frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+2\cdot7 & -8+2\cdot4 \\ -6+2\cdot(-2) & 3+2\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7-2\cdot1 & 4-2\cdot(-8) \\ -2-2\cdot(-6) & 1-2\cdot3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

B.802

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & y\\ x & 6\end{pmatrix}$ について

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

が成立するように x, y の値を定めよ.

アプローチ まず, ①の左辺を展開しましょう. ①はいつでも成立するわけではありません.

解答 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$$=A^2+AB+BA+B^2$$

であるから①は,

$$AB=BA \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

と同値である. ここで,

$$AB=\begin{pmatrix}2x & y+12\\ 4x & 3y+24\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3y & 4y\\ x+18 & 2x+24\end{pmatrix}$$

であるから, ②は

$$\begin{cases}2x=3y, & y+12=4y,\\ 4x=x+18, & 3y+24=2x+24\end{cases}$$

となり, これらから

$$\boldsymbol{x=6, \quad y=4}$$

を得る.

[注] 行列 A, B において $AB=BA$ が成立するとき, A, B は**可換**であるという. (☞ A8.7) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ となるのは, A, B が可換のときだけである. 一般に

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$
$$A^2B^2=(AB)^2$$
$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$$

なども成立するとは限らない.

しかし単位行列 E は $EA=AE$ を満たすので

$$A^2-E=(A-E)(A+E)$$
$$A^3+3A^2+3A+E=(A+E)^3$$

などは成立する.

B.803

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ とする．この A と可換な2次の正方行列，すなわち，$AX=XA$ となる行列 X は，E を単位行列，α，β を適当な数として，$X=\alpha E+\beta A$ と表されることを示せ．

アプローチ $X=\alpha E+\beta A$ ならば $AX=XA$ が成立することはすぐにわかりますが，$AX=XA$ を満たす X が $\alpha E+\beta A$ の形のものだけかどうかを調べなければなりません．

解答 $X=\begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$ とすると，

$$AX=\begin{pmatrix}x+2u & y+2v\\ 3x+4u & 3y+4v\end{pmatrix},$$

$$XA=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ u+3v & 2u+4v\end{pmatrix}$$

であるから，$AX=XA$ は

$$\begin{cases}x+2u=x+3y\\ 3x+4u=u+3v\\ y+2v=2x+4y\\ 3y+4v=2u+4v\end{cases}$$

すなわち，$\begin{cases}2u=3y\\ x+u=v\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}x=-u+v\\ y=\dfrac{2}{3}u\end{cases}$

と同値である．よって，

$$X=\begin{pmatrix}v-u & \dfrac{2}{3}u\\ u & v\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{u}{3} & \dfrac{2}{3}u\\ u & \dfrac{4}{3}u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v-\dfrac{4}{3}u & 0\\ 0 & v-\dfrac{4}{3}u\end{pmatrix}$$

$$=\frac{u}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\left(v-\frac{4}{3}u\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

と表せるから，

$$X=\frac{1}{3}uA+\left(v-\frac{4}{3}u\right)E$$

と表せる．■

$\alpha=v-\dfrac{4}{3}u$，$\beta=\dfrac{1}{3}u$ とおけば $X=\alpha E+\beta A$ が成立する．

B. 804

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\ \Delta=ad-bc,$$

$t=a+d$ とする．次の各項が成立することを示せ．

(1) $AB=BA=\Delta E$

(2) $A^2-tA+\Delta E=O$

(3) $\Delta\neq 0$ ならばAの逆行列 A^{-1} が存在し，$\dfrac{1}{\Delta}B$ に等しい．

(4) $\Delta=0$ ならばAは逆行列をもたない．

解答 **(1)** $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\Delta E$$

◀ 行列の積の定義にもとづいて実直に計算するのみ．

$$BA=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\Delta E$$

(2) $tA-A^2=(tE-A)A=BA=\Delta E$　　◀ $tE-A=B$

$\therefore\ \ A^2-tA+\Delta E=O$

(3) $\Delta\neq 0$ ならば

$$X=\frac{1}{\Delta}B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX=XA=E$$

が成立する．すなわち

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}B$$

◀ $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(4) A^{-1} が存在すると仮定する．$\Delta=0$ だから

$$B=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=O$$

◀ $AB=\Delta E=O$

$\therefore\ \ a=b=c=d=0\quad \therefore\ \ A=O$

となり，A^{-1} が存在するという仮定に反する．

よって A^{-1} は存在しない．

[注]　$\Delta=ad-bc$ はAの行列式(determinant)，$t=a+d$ はAの跡(trace)と呼ばれ，$\Delta=\det A$，$t=\mathrm{tr}\,A$ と書く．

(2)はケーリー・ハミルトンの定理である．

B.805

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t，$\varDelta$ が

$$A^2-tA+\varDelta E=O \qquad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

を満たすとき，次の(i)，(ii)のいずれかが成立することを示せ．

(i)　$A=xE$ と表される．ただし x は $x^2-tx+\varDelta=0$ の実数解である．

(ii)　$t=a+d$ かつ $\varDelta=ad-bc$

アプローチ　(i) $\Longrightarrow$ ① は明らか．(ii) $\Longrightarrow$ ① はいわゆるケーリー・ハミルトンの定理 (B.804 (2))．問題はその逆を示すことですが，ケーリー・ハミルトンの定理を利用すると計算が楽になります．

解答　ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \qquad \cdots\cdots\cdots \ ②$$

①−② を作ると

$$(a+d-t)A-(ad-bc-\varDelta)E=O \qquad \cdots\cdots\cdots \ ③$$

ここで $a+d=t$ と仮定すると③より

$ad-bc=\varDelta$ を得る．

また，$a+d\neq t$ と仮定すると，③より

$$A=xE \qquad \left(ここで\ x=\frac{ad-bc-\varDelta}{a+d-t}\right)$$

と表せる．

これを①に代入すると

$$(x^2-tx+\varDelta)E=O$$

$$\therefore \quad x^2-tx+\varDelta=0$$

を得る．

よって，(i)または(ii)のいずれかが成立する．■

［注］　①と②の係数を比較すると，(ii)が出て来るように思うが，①と②の係数どうしが等しいとは限らない．

たとえば $A=E$ に対するケーリー・ハミルトンの定理は

$$A^2-2A+E=O$$

であるが，$A=E$ は

$$A^2-E=O$$

も満たす．

B.806

$n=1, 2, \cdots\cdots$ とする．

(1)　x^n を x^2+x-6 で割った余りを $\alpha x+\beta$ として，α，β を求めよ．

(2)　$X=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対し X^n を計算せよ．

アプローチ　(1)　$x^n=(x^2+x-6)Q(x)+\alpha x+\beta$ とおきます．

(2)　Xが $X^2+X-6E=O$ を満たすことに注意して(1)を利用します．

解答　**(1)**　x^n を x^2+x-6 で割った商を $Q(x)$，余りを $\alpha x+\beta$ とおくと，

$$x^n=(x^2+x-6)Q(x)+\alpha x+\beta \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

これに $x=2$ および $x=-3$ を代入して

$$2^n=2\alpha+\beta,\ (-3)^n=-3\alpha+\beta$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{5}\{2^n-(-3)^n\}, \\ \beta=\dfrac{1}{5}\{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n\} \end{cases}$$

(2)　①のxのところに行列Xを代入する．　◀ A8.7III

$$X^n=(X^2+X-6E)Q(X)+\alpha X+\beta E \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

ここで，ケーリー・ハミルトンの定理

$$X^2+X-6E=O$$

を用いると

$$X^n=\alpha X+\beta E$$

よって**(1)**の結果から

$$X^n=\frac{1}{5}\{2^n-(-3)^n\}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\frac{1}{5}\{3\cdot 2^n+2\cdot(-3)^n\}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{4\cdot 2^n+(-3)^n}{5} & \dfrac{4\cdot 2^n-4\cdot(-3)^n}{5} \\ \dfrac{2^n-(-3)^n}{5} & \dfrac{2^n+4(-3)^n}{5} \end{pmatrix}$$

[注]　1°　X^n を計算する別の方法もある．(☞ B.811)

2°　②の成立を確かめることは①の成立を確かめることと同じである．それはXとEが可換だからである ☞ B.802 [注]．

B.807

2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が，$A^3=O$ を満たすならば $A^2=O$であることを証明せよ．

解答（その1）ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad \cdots\cdots ①$$

が成立するので，この両辺に A^2 を左からかけると

この変形が key ▶

$$A^4-(a+d)A^3+(ad-bc)A^2=O$$

$A^3=O$ より，$A^4=O$ であるから

$$(ad-bc)A^2=O$$

$$\therefore \quad ad-bc=0 \quad \text{または} \quad A^2=O.$$

ここで，

$$ad-bc=0 \quad \cdots\cdots ②$$

とすると，①より

$$A^2=(a+d)A$$

となるので

$$A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$$

したがって $A^3=O$ より

$$(a+d)^2A=O$$

$$\therefore \quad a+d=0 \quad \text{または} \quad A=O.$$

ここで，

$a+d=0$ のときは，①，②より　$A^2=O$

$A=O$ のときは，もちろん　$A^2=O$.

以上，いずれの場合も，結局 $A^2=O$ がいえる．■

（その2）$ad-bc \neq 0$ と仮定すると A^{-1} が存在するから，$A^3=O$ の両辺に A^{-1} を2回かけると，

$$A^{-1}(A^{-1}A^3)=A^{-1}(A^{-1}O)$$

$$\therefore \quad A=O$$

$$\therefore \quad a=b=c=d=0$$

となり，$ad-bc \neq 0$ の仮定に反する．

よって $ad-bc=0$．以下（その1）と同じ．■

［注］上で証明した事実は，n を任意の自然数として

“$A^n=O$　ならば　$A^2=O$　である”

に一般化できる．

B.808

2次の正方行列Xに対して$f(X)$を

$$f(X)=(E-X)(E+3X)^{-1}\qquad (E\text{は単位行列})$$

と定義する．ただし，Xとしては$(E+3X)^{-1}$が存在するようなもののみ考える．このとき$f(f(X))=X$を示せ．

アプローチ 関数$f(x)=\dfrac{1-x}{1+3x}$に対して$f(f(x))=x$を示すことは簡単です．結局これと同じことをするだけなのですが……．

解答 $f(f(X))$を計算するために，まず，

$E-f(X)$と，$(E+3f(X))^{-1}$を計算する．

$$\begin{aligned}E-f(X)&=E-(E-X)(E+3X)^{-1}\\&=(E+3X)(E+3X)^{-1}-(E-X)(E+3X)^{-1}\\&=\{(E+3X)-(E-X)\}(E+3X)^{-1}\\&=4X(E+3X)^{-1}\qquad\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

◀$1-\dfrac{1-x}{1+3x}$に相当．

◀$\dfrac{1+3x}{1+3x}-\dfrac{1-x}{1+3x}$と〈通分〉

$$\begin{aligned}E+3f(X)&=E+3(E-X)(E+3X)^{-1}\\&=(E+3X)(E+3X)^{-1}+3(E-X)(E+3X)^{-1}\\&=\{(E+3X)+3(E-X)\}(E+3X)^{-1}\\&=4E(E+3X)^{-1}\\&=4(E+3X)^{-1}\end{aligned}$$

◀$1+3\dfrac{1-x}{1+3x}$に相当．

◀$\dfrac{1+3x}{1+3x}+\dfrac{3(1-x)}{1+3x}$と〈通分〉

$$\therefore\quad (E+3f(X))^{-1}=\frac{1}{4}(E+3X)\qquad\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\begin{aligned}f(f(X))&=(E-f(X))(E+3f(X))^{-1}\\&=4\cdot\frac{1}{4}X(E+3X)^{-1}(E+3X)\\&=X\quad ■\end{aligned}$$

［注］　このように通常の分数式と同様の計算をしてよいのだが，それはEとAが可換$(EA=AE)$だからである．$AB\neq BA$のとき，

$B^{-1}A\neq AB^{-1}$だから，$\dfrac{A}{B}$と書くことはできない．

B. 809

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\det A = ad-bc$ として

「$A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たす $\vec{x}$ が存在するための必要十分条件は $\det A=0$ である」ことを証明せよ．

アプローチ▶ x，y についての連立1次方程式 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ すなわち $A\vec{x}=\vec{0}$ はいつも $x=y=0$ をひとつの解にもちますが，それ以外の解が存在するかどうかを問題にしています．

解答　1°「$A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たす $\vec{x}$ が存在する $\Longrightarrow$ $\det A=0$」

を証明するには，その対偶である

「$\det A\neq 0 \Longrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たす $\vec{x}$ が存在しない」

を証明すればよい．

$\det A\neq 0$ ならばAの逆行列 A^{-1} が存在する．そこで，$A\vec{x}=\vec{0}$ に左から A^{-1} をかけて

$A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$　∴　$\vec{x}=\vec{0}$

したがって，$A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ となる $\vec{x}$ はあり得ない．■

2°　逆の証明

$\vec{x}\neq\vec{0}$ ならなんでもよい．

▶ i）$A=O$ の場合．たとえば $\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たす．

B. 804(1)

▶ ii）$A\neq O$ の場合．$B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすると $AB=O$ であるから，

$\vec{x}_1=\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ として $A\vec{x}_1=\vec{0}$, $A\vec{x}_2=\vec{0}$ が成立する．

そして，$A\neq O$ の仮定より，$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ のいずれか一方は $\vec{0}$ ではない．したがって，$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ の少くとも一方は，$A\vec{x}=\vec{0}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$ を満たす．■

B. 810

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，

$$A\vec{x}=k\vec{x} \text{ かつ } \vec{x}\neq\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす $\vec{x}$ が存在するような数 k のことを行列 A の固有値といい，ベクトル $\vec{x}$ をその固有値に対応する固有ベクトルという．

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は2つあることを示し，その固有値 k_1，k_2 と固有ベクトル $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$ を求めよ．

(2)　次に，$\vec{x}_1$ の1つを第1列，$\vec{x}_2$ の1つを第2列にもつ行列 P を作り $P^{-1}AP$ を計算せよ．

解答　(1)　$A\vec{x}=k\vec{x}$ より

$$A\vec{x}-kE\vec{x}=\vec{0}$$

$$\therefore\quad (A-kE)\vec{x}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

②を満たす $\vec{x}\neq\vec{0}$ となる $\vec{x}$ が存在するのは

$$\det(A-kE)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

◀ここで前問B.809の定理を用いた．

のときである．

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の場合には $A-kE=\begin{pmatrix} 3-k & 2 \\ 1 & 4-k \end{pmatrix}$

であるから，③は $k^2-7k+10=0$

$\therefore\quad k=2,\ 5$

i）　$k=2$ のとき　②より $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\quad x+2y=0$

したがって，$k_1=\mathbf{2}$，$\vec{x}_1=\alpha\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $(\alpha\neq0)$

ii）　$k=5$ のとき　②より $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\quad x-y=0$

よって，$k_2=\mathbf{5}$，$\vec{x}_2=\beta\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $(\beta\neq0)$

(2)　$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

◀$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

B. 811

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$ に対して，$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ にとると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$$

となる．

これを利用して，正の整数 n に対し，A^n を求めよ．

アプローチ 問題文の前半は B.810 で確かめてあります．

解答 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}=B$ とおくと，

$$A=PBP^{-1}$$

$$\therefore\quad A^n=\underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots\cdots(PBP^{-1})}_{n\text{個}}$$

$$=PB^nP^{-1} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，

$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\0 & \beta^n\end{pmatrix}$ ▶

$$B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 5^n\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より

$$A^n=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 5^n\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & -2^n\\5^n & 2\cdot5^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n & -2^{n+1}+2\cdot5^n\\-2^n+5^n & 2^n+2\cdot5^n\end{pmatrix}$$

［注］ 行列 P をうまく選んで $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$ という形にできるとき（A を対角化できるとき），上記の方法を用いて A^n を計算することができる．しかし，すべての行列が対角化できるとは限らない．例えば

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

に対して $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$ となるような行列 P は存在しない．

A^n を計算する別の方法については，☞ B.806

B.812

aを定数とする．

x，y の連立1次方程式 $\begin{cases}(2a-1)x+(3a+1)y=a\\(a-1)x+(2a+1)y=2a\end{cases}$ を解け．

アプローチ 係数行列が逆行列をもつ場合ともたない場合に分けて考えましょう．

解答 係数行列 $A=\begin{pmatrix}2a-1 & 3a+1\\ a-1 & 2a+1\end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は

$$\det A=(2a-1)(2a+1)-(3a+1)(a-1)=a(a+2)$$

である．

$\det A\neq 0$ つまり **$a\neq 0$，-2 のとき**

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$ の両辺に左から

◀ A 8.11 II

$$A^{-1}=\frac{1}{a(a+2)}\begin{pmatrix}2a+1 & -(3a+1)\\ -(a-1) & 2a-1\end{pmatrix}$$

をかけると，解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{a(a+2)}\begin{pmatrix}2a+1 & -(3a+1)\\ -(a-1) & 2a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{4a+1}{a+2}\\ \dfrac{3a-1}{a+2}\end{pmatrix}$$

が得られる．

$a=0$ のとき

連立方程式は $\begin{cases}-x+y=0\\-x+y=0\end{cases}$ となるから無数の解 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$

（t は任意の実数）をもつ．

$a=-2$ のとき

連立方程式は $\begin{cases}-5x-5y=-2\\-3x-3y=-4\end{cases}$ より $\begin{cases}x+y=\dfrac{2}{5}\\x+y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$ となるから

解は存在しない．

B. 813

掃き出し法によって，x，y，z の3元1次連立方程式

$$\begin{cases} -x+2y+\ z=3 \\ 2x-\ y+\ z=0 \\ 3x-2y-2z=5 \end{cases}$$

を解け．

解答　係数と右辺の定数を並べた行列

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

に対して，基本変形を行う．

▶ 拡大係数行列ということがある．

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[3]+[1]\times 3}]{{[2]+[1]\times 2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

▶ [2]+[1]×2 は第2行に第1行の2倍を加えるとこを意味する．

$$\xrightarrow[{[2]\times\frac{1}{3}}]{{[1]\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[3]+[2]\times(-4)}]{{[1]+[2]\times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

▶ [1]×(−1) は第1行を(−1)倍することを意味する．

$$\xrightarrow{{[3]\times\left(-\frac{1}{3}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[2]+[3]\times(-1)}]{{[1]+[3]\times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

▶ [1]+[3]×(−1) の代わりに [1]−[3]と書いても同じ．

これより解は

$$\boldsymbol{x=3,\ \ y=4,\ \ z=-2}$$

である．

［注］　途中の基本変形は，上に示した変形だけに限られない．しかし，当たり前のことではあるが，最後に得られる行列の形，言い換えると解は一通りに定まる．

B. 814

掃き出し法によって，x，y，z の3元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x-3y+\ z=-5 \\ x-\ y+2z=\ 3 \\ 4x-7y-\ z=-21 \end{cases}$$

の解をすべて求めよ．

解答 拡大係数行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -1 & -21 \end{pmatrix}$ を考える．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -1 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{[1]-[2]\times 2 \\ [3]-[2]\times 4}]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[2]-[1] \\ [3]-[1]\times 3}]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{[1]\times(-1) \\ [1]\leftrightarrow[2]}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◀ 右側の変形は，第1行を(-1)倍したあと，第1行と第2行を交換することを意味する．

この結果は，もとの連立方程式が

$$\begin{cases} x \qquad + 5z=14 & \cdots\cdots ① \\ \qquad y+\ 3z=11 & \cdots\cdots ② \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0 \end{cases}$$

と同値であることを示している．したがって，すべての解はたとえば，$z=t$ (t は任意の実数) とすると，①，②より，

$$\boldsymbol{x=-5t+14,\ y=-3t+11,\ z=t} \qquad \cdots\cdots ③$$

と表される．

［注］ この連立方程式の解の表し方は，③だけに限られるわけではない．たとえば，$x=s$ (s は任意の実数) とすると，

$$x=s,\ y=\frac{3s+13}{5},\ z=\frac{-s+14}{5} \qquad \cdots\cdots ④$$

と表されることになる．ここで，t が変化したときの③で表されている $(x,\ y,\ z)$ 全体と，s が変化したときの④で表されている $(x,\ y,\ z)$ 全体は一致していることに注意する必要がある．

B.815

x，y，z の3元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x-3y+\ z=a \\ \ x-\ y+2z=b \\ 4x-7y-\ z=c \end{cases}$$

が解をもつために，a，b，c の満たすべき条件を求めよ．

アプローチ▶ B814と同じ係数行列です．同じ基本変形を行って，調べてみましょう．

解答 拡大係数行列 $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 4 & -7 & -1 & c \end{pmatrix}$ を考える．

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 4 & -7 & -1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{[1]-[2]\times 2 \\ [3]-[2]\times 4}]{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & a-2b \\ 1 & -1 & 2 & b \\ 0 & -3 & -9 & c-4b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[2]-[1] \\ [3]-[1]\times 3 \\ [1]\times(-1)}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -a+2b \\ 1 & 0 & 5 & -a+3b \\ 0 & 0 & 0 & -3a+2b+c \end{pmatrix}$$

第3行は方程式として $0x+0y+0z=-3a+2b+c$ を意味する．

これより，連立方程式が解をもつための条件は

$$\boldsymbol{-3a+2b+c=0}$$

である．

[注] 見方を変えると，連立方程式は
$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

と表される．ここで，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ に注意すると，①は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=(x+5z)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+(y+3z)\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

(ただし，$x+5z=s$，$y+3z=t$) となるから，求めた条件は，

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が2つのベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ の定数倍の和で表される条件であるとみなすこともできる．

B.816

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ とする．$\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{X_3}=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ それぞれを未知数とする3つの連立方程式

$$A\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots\text{①},\quad A\overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots\text{②},\quad A\overrightarrow{X_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots\text{③}$$

解くことにより，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

アプローチ 係数行列が同じであることを利用し，①，②，③を同時に処理できます．

解答 $\overrightarrow{X_1}$，$\overrightarrow{X_2}$，$\overrightarrow{X_3}$ は $\left(\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$，$\left(\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\end{array}\right)$，$\left(\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\end{array}\right)$ を基本変形することによって順に得られるが，これらを同時に処理するために，$\left(\begin{array}{c|ccc}A&1&0&0\\&0&1&0\\&0&0&1\end{array}\right)$ の基本変形を考える．

◀ $\left(\begin{array}{c|c}A&\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&5&0\\3&5&6&0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&4&5&0&1&0\\3&5&6&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{[2]-[1]\times2\\ [3]-[1]\times3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&0&-1&-2&1&0\\0&-1&-3&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[{[1]+[3]\times2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-5&0&2\\0&0&-1&-2&1&0\\0&-1&-3&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{[1]-[2]\times3\\ [3]-[2]\times3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&2\\0&0&-1&-2&1&0\\0&-1&0&3&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{[2]\times(-1)\\ [3]\times(-1)}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&2\\0&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-3&3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[{[2]\leftrightarrow[3]}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&2\\0&1&0&-3&3&-1\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right)$$

◀ 左半分と右側第1列だけに着目すると①を解いていることになる．右側の第2列，第3列に着目すると②，③を解いていることになる．

最後に得られた行列の右半分の第 1，2，3 列がそれぞれ，$\overrightarrow{X_1}$，$\overrightarrow{X_2}$，$\overrightarrow{X_3}$ となるから，

$$\overrightarrow{X_1}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{X_2}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{X_3}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

である．

行列の積の定義から

$$A(\overrightarrow{X_1}\ \ \overrightarrow{X_2}\ \ \overrightarrow{X_3})=(A\overrightarrow{X_1}\ \ A\overrightarrow{X_2}\ \ A\overrightarrow{X_3})\quad\cdots\cdots\cdots④$$

◀ $(\overrightarrow{X_1}\ \ \overrightarrow{X_2}\ \ \overrightarrow{X_3})$ は第 1，2，3 列がそれぞれ $\overrightarrow{X_1}$，$\overrightarrow{X_2}$，$\overrightarrow{X_3}$ である行列を表す．

であり，$\overrightarrow{X_1}$，$\overrightarrow{X_2}$，$\overrightarrow{X_3}$ は，①，②，③をみたすから，結果として

$$A(\overrightarrow{X_1}\ \ \overrightarrow{X_2}\ \ \overrightarrow{X_3})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

が成り立つ．これより，

$$A^{-1}=(\overrightarrow{X_1}\ \ \overrightarrow{X_2}\ \ \overrightarrow{X_3})=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

である．

[注]　1°　成分が具体的に数値で与えられた 3 次正方行列において，逆行列は上に示した方法で求めることができる．一般に，n 次正方行列でも同様である．

つまり，3 次正方行列 A と 3 次単位行列 E を並べた行列 $(A \mid E)$ を作り，

$$(A \mid E)\xrightarrow[\text{基本変形}]{\qquad\qquad}(E \mid B)$$

と変形できるとき，最後に得られた行列の右半分 B が A の逆行列 A^{-1} に等しい．

また，基本変形によって，$(A \mid E)$ の左半分を単位行列に変形できないときには，A の逆行列は存在しない．

2°　解答中の④式が成り立つことを，成分計算によって確かめよ．

この性質から，B.810 において $P^{-1}AP$ が対角行列になることも説明できる．

$A\vec{x_1}=2\vec{x_1}$，$A\vec{x_2}=5\vec{x_2}$ であるから，$P=(\vec{x_1}\ \ \vec{x_2})$ とおくと

$$AP=A(\vec{x_1}\ \ \vec{x_2})=(A\vec{x_1}\ \ A\vec{x_2})=(2\vec{x_1}\ \ 5\vec{x_2})=(\vec{x_1}\ \ \vec{x_2})\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

が成り立つ．このあと，辺々に左から P^{-1} をかけると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$ となる．

§9 コンピュータの利用

コンピュータに仕事をさせるには，コンピュータに仕事の手順を指示する命令書を書かなければならない．これがいわゆるプログラムである．プログラムは，コンピュータがそれを“理解”できるために，ある一定の様式＝文法に従って書かれなければならない．コンピュータを自在に操って，欲しいと思うデータを，思い通りに得ることができるためには，このようなプログラムを作ること＝プログラミングに習熟することが不可欠である．しかし，「思い通りに」の規準を緩めて，得られる計算や処理の結果がある程度の規格品でも良い，と考えると，(初心者に) 難しいプログラミングの手間をかけずに，電卓のような気軽さでコンピュータを活用できる．

本シリーズでは，すでに数学A，数学Bで，BASICという言語を利用したプログラミングの基本を解説しているので，本書では，やや違ったアプローチを紹介しよう．家計簿のような会計処理で有名な表計算ソフト(いわゆるスプレッド・シート spread sheet)と，グラフを描くための専用ソフト，その他である．

表計算ソフトについては，マイクロソフト社のMS-WORKSを利用している．これは，低価格ながら，表計算機能のほかに，いわゆるワープロ，データベース，通信の諸機能を統合したもので，最近販売されているPCには，初めから標準添付されていることが多いからである．以下で紹介する具体例は，MS-WORKS以外の，より高機能な(そして，一般により高価で，しばしばより“重い”)表計算ソフトの上でも，そのまま，あるいはわずかな修正で稼動するはずである．

グラフ作成については，有名なフリーウェアGNUPLOTを紹介する．これは，R. Stallmannの主宰するFree Software FoundationのGNU projectの精神に基いて公開されているもので，unixからDOS，MS-WINDOWS上にも移植されている．

[注] MS-WORKS，MS-WINDOWSは，Microsoft社の登録商標です．

A 9.1　表計算ソフトの応用

I．表計算ソフトの基本

表計算ソフトは，ベクトルや行列のように並んだ数値データに対する細かく煩雑な計算を行ない，その結果を表示する，という機能をもつ．

おのおのの数値は，セル（cell＝細胞）と呼ばれる枠の中に格納され，その値は，それを格納したセルの縦，横の位置（番地と呼ばれる）で参照される．たとえば，下図の一番左の例（“A列”）の 13 行目のセルに格納された値——ここでは，下表に示されるように 10——は，A13 という変数名で参照できる．

	A	B	C	D	E	F	G
1	Spread Sheet						
2							
3	n	n^2	n^3	n^4	n^5		
4	1	1	1	1	1		
5	2	4	8	16	1024		
6	3	9	27	81	59049		
7	4	16	64	256	1048576		
8	5	25	125	625	9765625		
9	6	36	216	1296	60466176		
10	7	49	343	2401	282475249		
11	8	64	512	4096	1073741824		
12	9	81	729	6561	3486784401		
13	10	100	1000	10000	10000000000		
14							
15	55	385	3025	25333	14914341925		
16							
17							
18							

これに対し，セルには，数式も入れることができる．下図で，たとえば，B列の6行目のセルには，

$$=A6\hat{}2$$

という式が入っている．最初の“＝”は，この後に続くのが，数値データや単なる文字列ではなく，数式であることを示している．

同様に，B列の7行目，8行目，9行目，……には，

$$=A7\hat{}2,\ =A8\hat{}2,\ =A9\hat{}2,\ \cdots$$

という数式が入っている．

“∧”は，BASICの場合と同様，この表計算ソフトでは，累乗を表す記号で，“＝A6^2”は，A6というセルに格納された数値データの2乗を計算してそこに表示する，という命令を表している．A6には，ここでは3という数値データが格納されているので，B列の6行目のセルには，“9”という数値が表示される．

B列6行目のセルに入っているのは，＝A6^2 という数式であるが，表に現れたセルには，A6に入った値(＝3)の2乗の値が計算されて9と表示されている

Microsoft Works

ﾌｧｲﾙ(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ﾂｰﾙ(O)　ｳｨﾝﾄﾞｳ(W)　?

B6　=A6^2

SPREAD.WKS

	A	B	C	D	E	F	G
1	Spread Sheet						
2							
3	n	n^2	n^3	n^4	n^5		
4	1	1	1	1	1		
5	2	4	8	16	1024		
6	3	9	27	81	59049		
7	4	16	64	256	1048576		
8	5	25	125	625	9765625		
9	6	36	216	1296	60466176		
10	7	49	343	2401	282475249		
11	8	64	512	4096	1073741824		
12	9	81	729	6561	3486784401		
13	10	100	1000	10000	10000000000		
14							
15	55	385	3025	25333	14914341925		
16							
17							
18							

[Alt]=コマンド選択，[F2]=編集

A6には，数値3が格納されている

同様に，C列，D列，E列には，それぞれ上の行から順に

＝A4^3,　　＝A4^4,　　＝A4^5
＝A5^3,　　＝A5^4,　　＝A5^5
＝A6^3,　　＝A6^4,　　＝A6^5
⋮　　⋮　　⋮

という数式が入っている．したがって，生の数値データが格納されているのは，A列だけで，後は，このデータに基づいて，それぞれの数式に従って計算された結果が自動的に表示されるのである．

注　この数式は，おのおののセルに対して，逐一書き込まなくても，コピー&ペースト (copy & paste) 機能を用いて簡単に書き入れることができる．ここで重要なのは，相対指定という考え方であるが，数学のベクトルの概念を修得している読者なら，容易に理解できるはずである．相対指定 / 絶対指定の考え方および copy & paste のやり方については，それぞれのアプリケーション・ソフトのマニュアルを参照せよ．

II. 表計算ソフトによる関数値の計算

表計算ソフトを利用することにより，変数と関数の値の対応表を作ることができる．

C10 に入っているのは，＝sin(B10) という数式である

Microsoft Works

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ツール(O)　ウィンドウ(W)　?

C10　=SIN(B10)

GRAPH0.WKS

	A	B	C	D
1				
2		研文書院	大学への数学III&C	
3				
4			sin(x)のgraph	
5				
6				
7				
8				
9		xの値	sin(x)の値	
10		-5	0.95892427	
11		-4.9	0.98245261	
12		-4.8	0.99616461	
13		-4.7	0.99992326	
14		-4.6	0.993691	
15		-4.5	0.97753012	
16		-4.4	0.95160207	
17		-4.3	0.91616594	
18		-4.2	0.87157577	
19		-4.1	0.81827711	
20		-4	0.7568025	
21		-3.9	0.68776616	

[Alt]=コマンド選択，[F2]=編集

B10 に −5 という数値が格納されているので sin(−5)=0.95892427 の値が，C10 というセルに表される

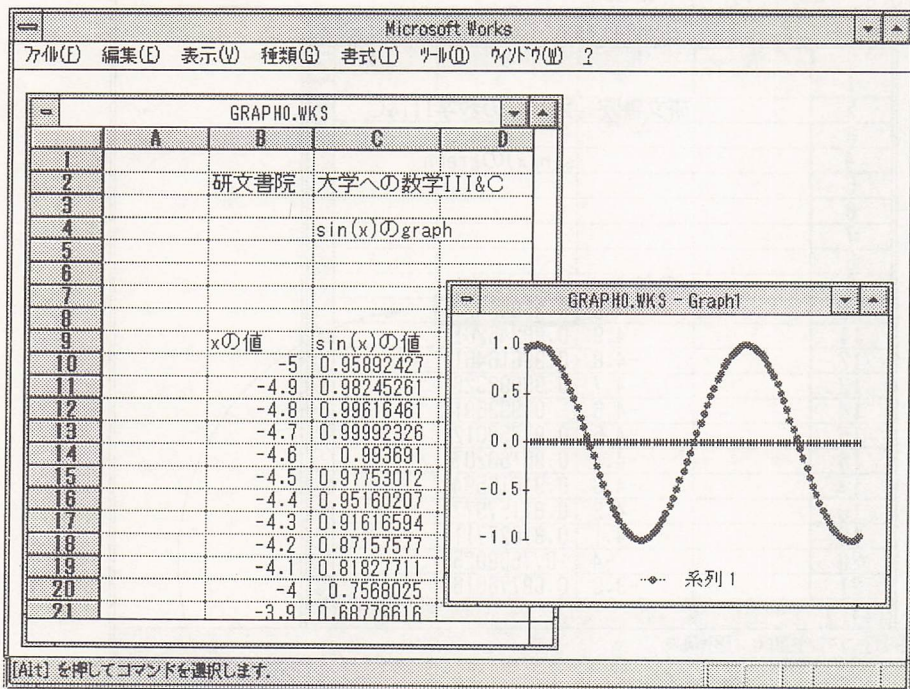
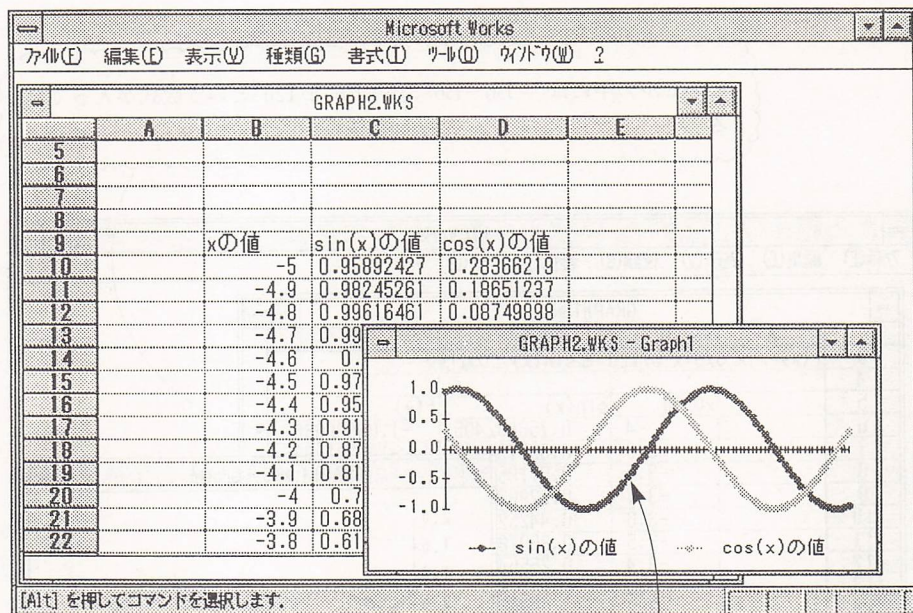
B列で，第10行以下で変数値を，−5からはじめて，0.1刻(きざ)みにとっている．C列には，第10行に，"＝SIN(B10)" という数式が入っていることからわかるように，左側の列のおのおのの値に対する正弦の値を計算した結果が入っている．

太い枠に入った 0.95892427 は

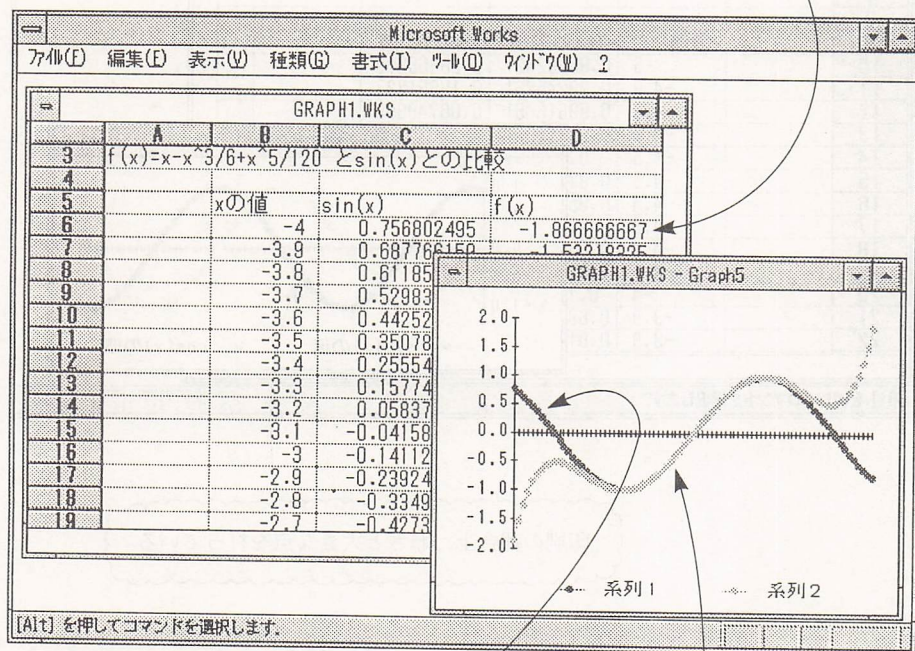
$$\sin(-5)$$

の値である．

このように，変数と関数の値の対応表ができると(下の画面では，一部分しか表示されていないが，実際は，$x=-5$ から $x=5$ まで，0.1 刻みにとっているので，この下にまだ 90 行弱続いている．

そしてこのような対応表が完成すると，そこでできたデータをグラフに表示させることができる．

複数のグラフを同じグラフ平面に図示することもできる．下図は，$-5 \leqq x \leqq 5$ の 0.1 刻の x の値に対し

$\sin x$ と $\cos x$ の値を計算し，その結果を，一緒に表示させたものである．$\sin x$ と $\cos x$ の値の変化が，'位相' がずれているだけで，同じように周期的に変化している様子がすぐに見てとれる．

無論，3つ以上の関数のグラフを一遍に描くこともできる．何本のグラフまで同時に描かせることができるかは，それぞれの表計算ソフトの能力による．

関数の式をセルの中に定義するだけで，複雑な式で表される関数のグラフをかくこともできる．下図は $\sin x$ と $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ のグラフを比較したものである．x が 0 に近いときには，両者は，極めて接近していることがわかる．

表計算ソフトを利用して媒介変数表示された曲線の概形を描くことも簡単にできる.（このときは, いわゆる **散布図** と呼ばれる手法を用いる.）

Microsoft Works

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　種類(G)　書式(T)　ツール(O)　ウィンドウ(W)　?

GRAPH3.WKS

	A	B	C
4	媒介変数表示された曲線		
5			
6			
7	theta	sin(theta)	cos(theta)
8	0	0	1
9	0.1	0.099833417	0.995004165
10	0.2	0.198669331	0.980066578
11	0.3	0.295520207	0.955336489
12	0.4	0.389418342	0.921060994
13	0.5	0.479425539	0.877582562
14	0.6	0.564642473	0.825335615
15	0.7	0.644217687	0.764842187
16	0.8	0.717356091	0.696706709
17	0.9	0.78332691	0.621609968
18	1	0.841470985	0.540302306
19	1.1	0.89120736	0.453596121
20	1.2	0.932039086	0.362357754

GRAPH3.WKS - Graph2

系列1

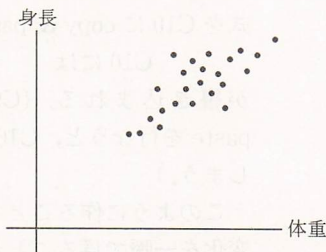
[Alt] を押してコマンドを選択します.

このセルには ＝sin(A20) という数式が入っている

上表では, θ(＝theta) の値を 0 から 3.1 まで 0.1 刻みでとり, そのおのおのの値に対し, $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を計算した表を作っている. 同じ θ の値に対応する $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を横座標, 縦座標にもつ点として表示させる散布図においては,

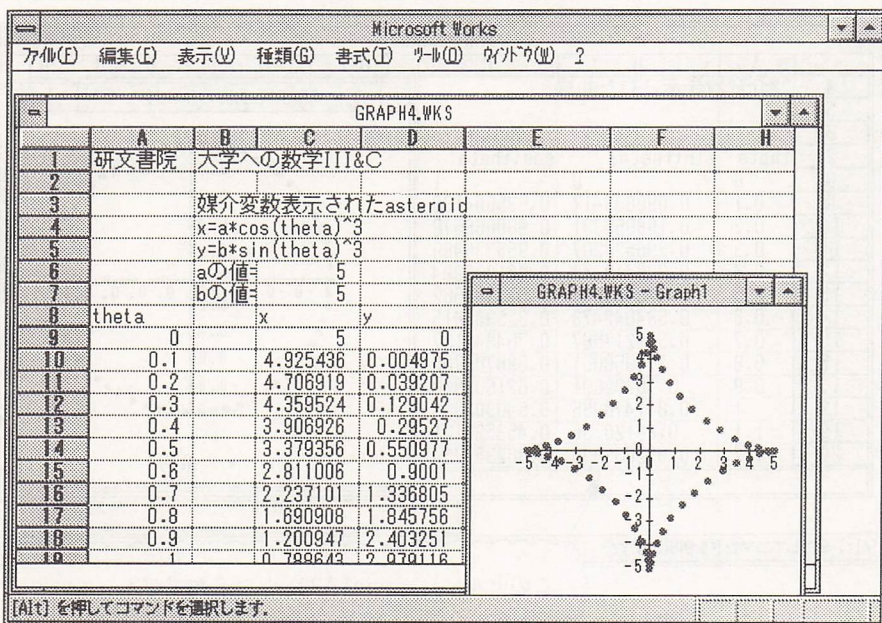
$$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos\theta \end{cases}$$

と媒介変数表示される曲線がプロットされることになる.

注　散布図は, 右図のように 2 つの数値をもつデータの分布を調べるために用いられる, 最も身近で簡単な統計的手段である.

セルに格納する数式を変更することによって，いかなる媒介変数表示にも，簡単に対応できる．下図は，

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = b\sin^3\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 3.1)$$

のグラフを描くためのものである．

	A	B	C	D
1	研文書院	大学への数学III&C		
2				
3		媒介変数表示されたasteroid		
4		x=a*cos(theta)^3		
5		y=b*sin(theta)^3		
6		aの値=	5	
7		bの値=	5	
8	theta		x	y
9	0		5	0
10	0.1		4.925436	0.004975
11	0.2		4.706919	0.039207
12	0.3		4.359524	0.129042
13	0.4		3.906926	0.29527
14	0.5		3.379356	0.550977
15	0.6		2.811006	0.9001
16	0.7		2.237101	1.336805
17	0.8		1.690908	1.845756
18	0.9		1.200947	2.403251
19	1		0.788643	2.979116

C6，C7というセルには，それぞれ，5，5という値が格納され，

C9には　　＝C6＊SIN(A9)

D9には　　＝C7＊COS(A9)

という数式が格納されている．単なるC6と違い，C6は，これが絶対指定であることを表している．そのため，C9の数式をC10にcopy & pasteすると，

C10には　　＝C6＊SIN(A10)

が書き込まれる．(C9を ＝C6＊SIN(A9) としてcopy & pasteを行なうと，C10には C7＊SIN(A10) が書き込まれてしまう．)

このように作ることで，a，b の値を変えたときのグラフの変化を一瞬で見ることができる．

III. 表計算ソフトによる数列和の計算

セルに並べられた数値を加え合わせる，といった単純な計算は，表計算ソフトの最も得意とするところである．

下の表は，A列に，1，2，3，……という数値データが格納されており，B列には，第6行から順に

A6，A6＋A7，A6＋A7＋A8，A6＋A7＋A8＋A9，……

の和を計算する式が記入されている．

	A	B	C	D	E	F	H
1		研文書院	大学への数学III&C				
2							
3		数列の和					
4							
5	n	1+2+3+...+n		2*n-1	1+3+5+...+(2n-1)		
6	1	1		1	1		
7	2	3		3	4		
8	3	6		5	9		
9	4	10		7	16		
10	5	15		9	25		
11	6	21		11	36		
12	7	28		13	49		
13	8	36		15	64		
14	9	45		17	81		
15	10	55		19	100		
16	11	66		21	121		
17	12	78		23	144		

6が表示されているセルB8には，“＝SUM(＄A＄6：A8)”という数式が入っているが，ここでSUMは，ちょうどΣ記号に担当する関数の記号であり，A6からA8までの和(すなわちA6，A7，A8に表示されている数値1，2，3の和)を計算して表示せよ，という命令である．

＄は，指定を表す記号である．

Ⅳ. 漸 化 式

与えられた漸化式で定められる数列の各項を計算することも，表計算ソフトの最も得意とするところである．

下のように作っておくと，a，b の値（C4，C5 のセルに入る値）と，初項 $x(1)$ の値（C8 に入る値）を変更するだけで漸化式が

$$x_n = ax_{n-1} + b \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

と表される，あらゆる数列の項が，瞬時に計算して表示される．

C4 には -2，C5 には -1 が格納され，また C9 の値は -3 であるので，C10 では，$(-2)\times(-3)+(-1)$ が計算されて，5 と表示されている．

フィボナッチ数列のような3項間漸化式も同様である．

B12 というセルに入っているのは，

　　＝B9＊B＄6＋B10＊B＄5

という数式である．

B＄6は，行の番号6だけを絶対指定する語法である．B列しか問題としていないので，列については，絶対指定するまでもないので，このようにしている．もちろん，＄B＄6のようにしても構わない．

漸化式の応用として，ニュートン法をあげよう．

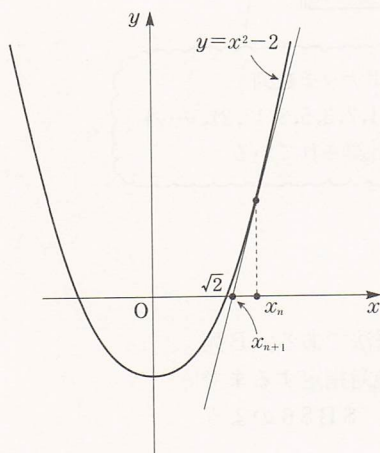
Microsoft Works

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ツール(O)　ウィンドウ(W)　?

D7　|　=(D6+2/D6)/2

NEWTON.WKS

	A	B	C	D	E
1					
2		研文書院	大学への数学III&C		
3		漸化式	Newton法による平方根の計算		
4					
5		n		x(n)	
6		0		2	
7		1		1.5	
8		2		1.416666667	
9		3		1.414215686	
10		4		1.414213562	
11		5		1.414213562	
12		6		1.414213562	
13		7		1.414213562	
14		8		1.414213562	
15		9		1.414213562	
16		10		1.414213562	
17					

[Alt] を押してコマンドを選択します．

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right) \end{cases}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

という漸化式で定義される数列は，$\sqrt{2}$ に収束する．そのことを利用して，漸化式を利用して $\sqrt{2}$ の近似値を計算することができるのである．

上表で，セル D7 には

=(D6+2/D6)/2

という数式が入っている．

この表より，x_5 で 1.414213562 という近似値に達し，それ以降，(少なくとも小数第 9 位までは) 同じ値しか出てこない (極限値に収束する) 様子が見てとれる．

V．表計算ソフトと統計

数値データの資料 x_1，x_2，……，x_n に対して，その平均 $\overline{x}$，分散 σ^2，標準偏差 σ は

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2-\overline{x}^2$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2-\overline{x}^2}$$

で計算される．また

$$50+\frac{x_i-\overline{x}}{\delta}\times 10$$

を，x_i の偏差値という．

	A	B	C	D
1	研文書院	大学への数学III&C		
2		統計		
3		平均と分散，標準偏差		
4				
5	データの平均		64	
6	データの２乗の平均		4425	
7	データの分散		329	
8	データの標準偏差		18.13835715	
9				
10	名称	データ	データの２乗	偏差値
11	A	45	2025	39.52
12	B	75	5625	56.06
13	C	85	7225	61.58
14	D	80	6400	58.82
15	E	65	4225	50.55
16	F	30	900	31.26
17	G	90	8100	64.33
18	H	50	2500	42.28
19	I	65	4225	50.55
20	J	55	3025	45.04

相関係数を求めるような計算も，簡単にできる．

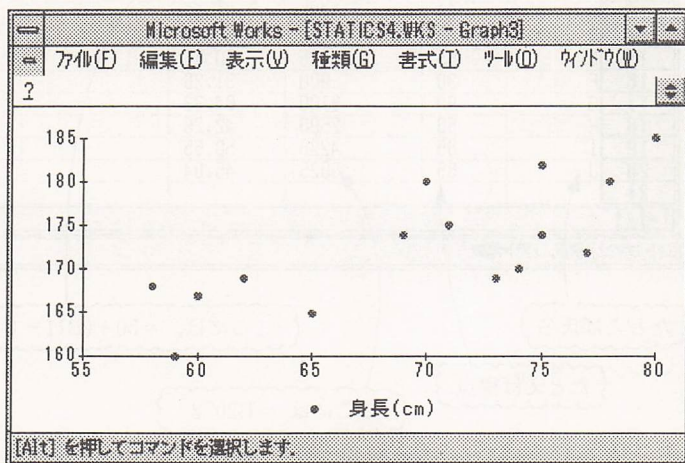
Microsoft Works - [STATICS4.WKS]

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ツール(O)　ウィンドウ(W)　?

F24　=F22/(D23*E23)

	A	B	C	D	E	F
1						
2		研文書院大学への数学III&C				
3		表計算ソフトによる統計			相関係数	
4						
5	氏名	体重(Kg)	身長(cm)	体重２乗偏差	身長２乗偏差	積率
6	A	65	165	22.40	58.78	36.29
7	B	58	168	137.67	21.78	54.76
8	C	70	180	0.07	53.78	1.96
9	D	75	182	27.74	87.11	49.16
10	E	69	174	0.54	1.78	-0.98
11	F	60	167	94.74	32.11	55.16
12	G	80	185	105.40	152.11	126.62
13	H	74	170	18.20	7.11	-11.38
14	I	62	169	59.80	13.44	28.36
15	J	71	175	1.60	5.44	2.96
16	K	78	180	68.34	53.78	60.62
17	L	59	160	115.20	160.44	135.96
18	M	77	172	52.80	0.44	-4.84
19	N	73	169	10.67	13.44	-11.98
20	O	75	174	27.74	1.78	7.02
21						
22	平均	69.733	172.67	49.52888889	44.22222222	35.311111
23	平方根（標準偏差）			7.037676384	6.649979114	
24	相関係数					0.7545045
25						

[Alt]=コマンド選択，[F2]=編集

相関関係については，相関係数を計算するよりも，散布図を描く方が，むしろ，事態を端的にとらえることができる．

VI. 表計算ソフトによる定積分の数値計算

定積分の値は，区分求積的に

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

や

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

で近似できる．台形公式やシンプソンの公式を用いると，一般に，より精密な近似値が得られる．

Microsoft Works

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ツール(O)　ウィンドウ(W)　?

C24　=SUM(C10:C20)*C8/2

KENBUNCE.WKS

	A	B	C	D	E
3		定積分の値	台形公式，シンプソンの公式		
4					
5		A=	0		
6		B=	3		
7		N=	10		
8		dx=	0.3		
9	x	f(X)=x^2	ColumnB*2,etc	ColumnB*2,*4	
10	0	0	0	0	
11	0.3	0.09	0.18	0.36	
12	0.6	0.36	0.72	0.72	
13	0.9	0.81	1.62	3.24	
14	1.2	1.44	2.88	2.88	
15	1.5	2.25	4.5	9	
16	1.8	3.24	6.48	6.48	
17	2.1	4.41	8.82	17.64	
18	2.4	5.76	11.52	11.52	
19	2.7	7.29	14.58	29.16	
20	3	9	9	9	
21					
22	単純区分求積	下側	7.695		
23		上側	10.395		
24	台形公式による和		9.045		
25	Simpson's Formula		9		
26					

上の表では，定積分 $\int_0^3 x^2\,dx$ の数値を 3 つの方法で近似的に求めている．

この場合，被積分関数が 2 次関数であるので，Simpson の公式によると誤差が生じない．

数値積分を利用して，数学的な定数の近似値を求めることもできる．

下表は，定積分

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

の値が $\frac{\pi}{4}$ であることを用いて，シンプソンの公式を用いた $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ の数値積分の結果を4倍することにより，π の近似値を求めようとしたものである．

この計算では，π の近似値として

3.141592614

が得られ，この近似法がそれなりに成功していることを示している．

Microsoft Works

ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　挿入(I)　書式(T)　ツール(O)　ウインドウ(W)　?

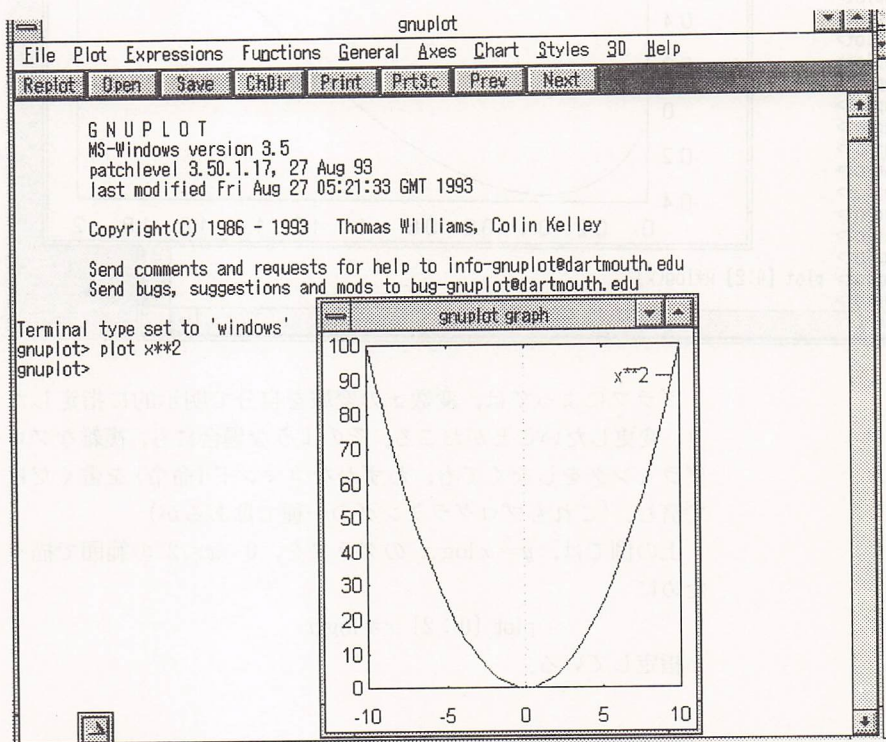
C23　　=C22*4

INTEGRA2.WKS

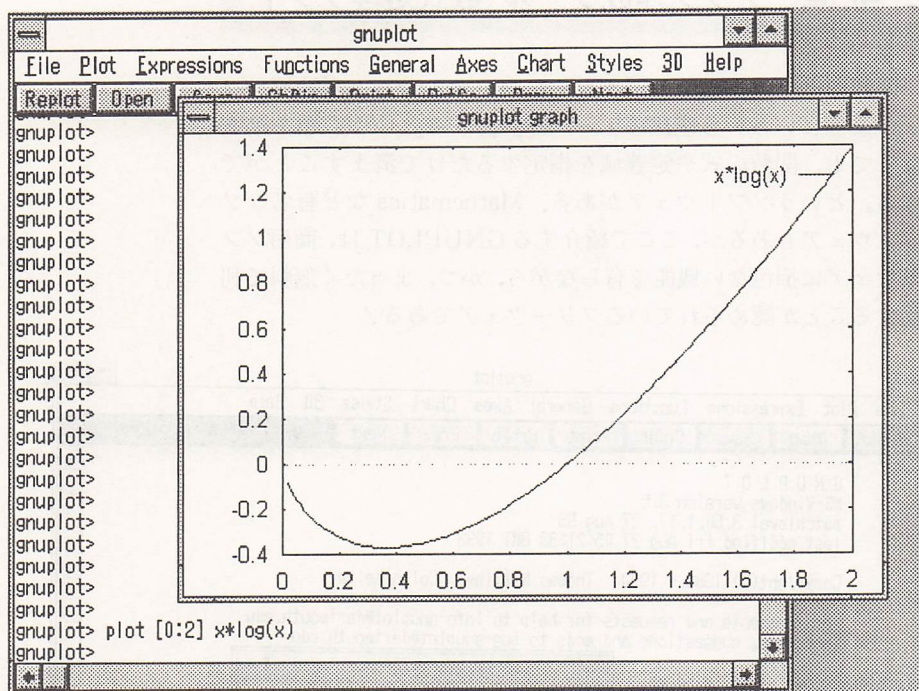
	A	B	C	D	E
2		研文書院	大学への数学III&C		
3		定積分の値	シンプソンの公式の応用		
4					
5		A=	0		
6		B=	1		
7		N=	10		
8		dx=	0.1		
9	x	f(x)=1/(1+x^2)	ColumnB*2,*4		
10	0	1	1		
11	0.1	0.99009901	3.96039604		
12	0.2	0.961538462	1.923076923		
13	0.3	0.917431193	3.669724771		
14	0.4	0.862068966	1.724137931		
15	0.5	0.8	3.2		
16	0.6	0.735294118	1.470588235		
17	0.7	0.67114094	2.684563758		
18	0.8	0.609756098	1.219512195		
19	0.9	0.552486188	2.209944751		
20	1	0.5	0.5		
21					
22	Simpson's Formulaによる値		0.785398153		
23		その4倍	3.141592614		
24					

[Alt]=コマンド選択，[F2]=編集

A9.2　グラフ作成ツール・数式処理ソフト

関数のグラフを描くという目的に限定するなら，表計算ソフトのようにいちいち座標のデータを計算するという手順を踏まなくても，関数の式や定義域を指定するだけで済ますことができる，というソフトウェアがある．Mathematica など有名なソフトウェアもあるが，ここで紹介する GNUPLOT は，商用ソフトウェアに損色ない機能を有しながら，かつ，まったく無料で利用することが認められているフリーウェアである！

上の MS-WINDOWS 上の GNUPLOT の画面である．単に

plot　$x**2$

と入力するだけで，x^2 のグラフである放物線が，$-10<x<10$ の範囲で図示される．(＊＊2 は，2乗を表現する記号である)

グラフによっては，変数 x の変域を自分で明示的に指定したり，変更したいことがおこる．そのような場合にも，複雑なプログラミングをしなくても，わずかなコマンド (命令) を書くだけで済む．(これもプログラミングの一種ではあるが)

上の例では，$y=x\log x$ のグラフを，$0<x<2$ の範囲で描くために

$$\text{plot}\ [0:2]\ x*\log x$$

と指定している．

極座標や媒介変数表示にも対応している.

gnuplot

File Plot Expressions Functions General Axes Chart Styles 3D Help

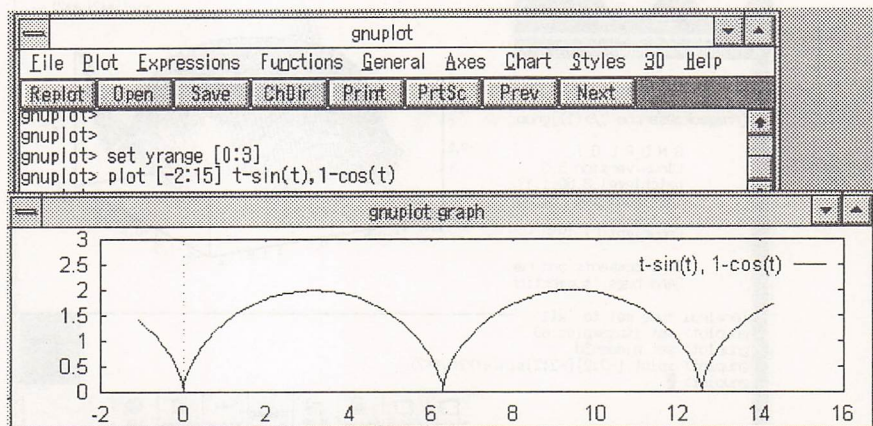
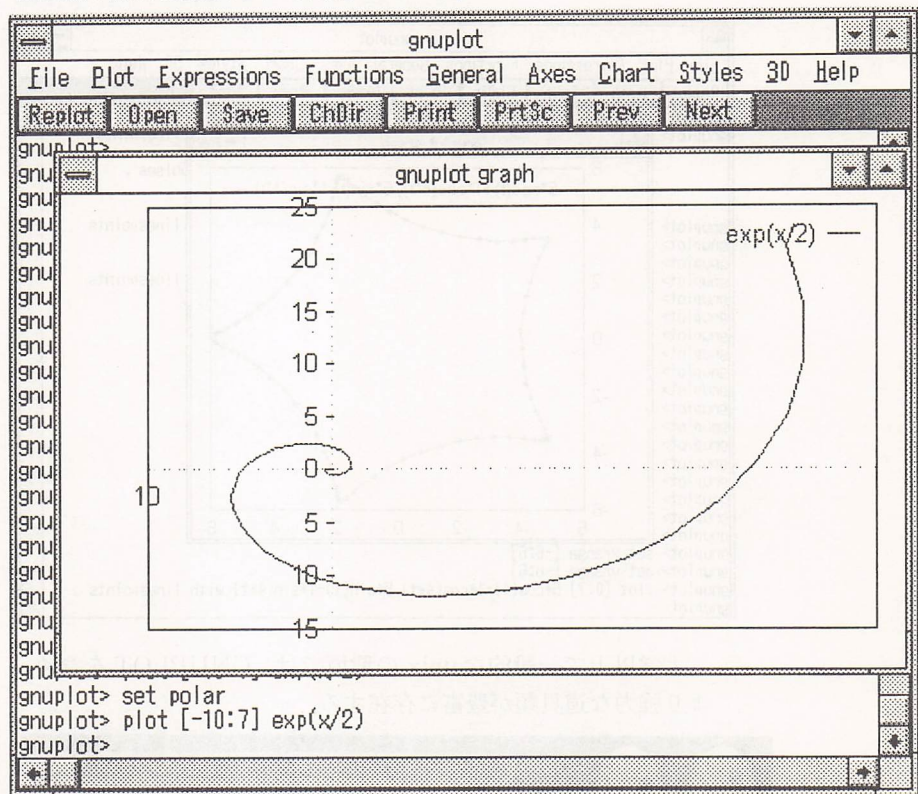
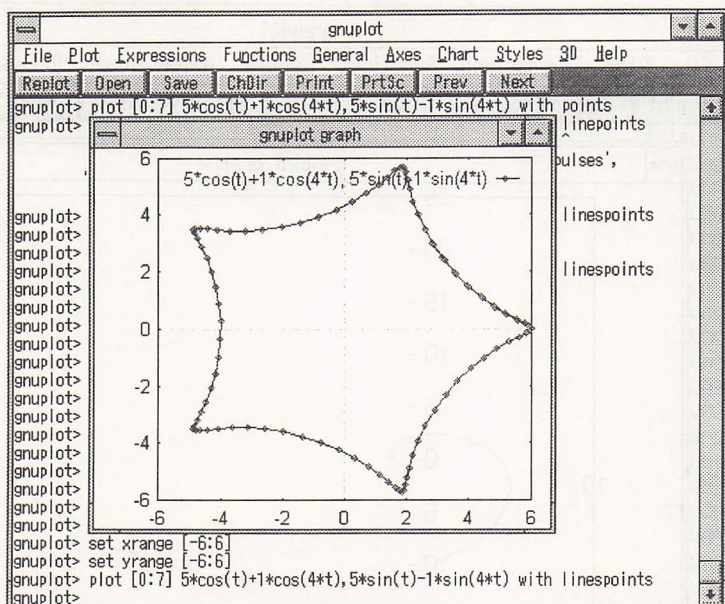
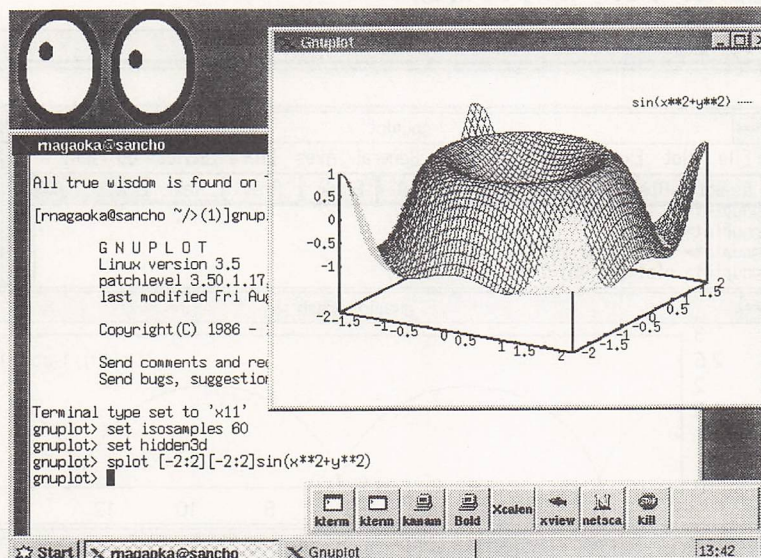
Replot Open Save ChDir Print PrtSc Prev Next

gnuplot graph

exp(x/2)

25 20 15 10 5 0 5 10 15

10

```
gnuplot> set polar
gnuplot> plot [-10:7] exp(x/2)
gnuplot>
```

内サイクロイドを描くのも簡単である.

大学以上で一般的な unix の環境では, GNUPLOT を含め, より強力な道具類が豊富に存在する.

前ページ下図は Linux 上の X-Window (XFree86) で利用される GNUPLOT の実行例である.

Linux 上には，グラフイックスだけでなく，数式をそのまま計算する(数式処理)ソフトで，研究教育機関に無料で開放されているものもある．下図は，ドイツの Paderborn 大学で開発された数式処理ソフト MuPAD の実行例である.

—— A9 おわり ——

Repos

日常生活における必要と十分

“必要”と“十分”は，２つの条件の間の論理的関係を表す最も基本的なことばですが，高校生の中には，数学Ｉの単元の１つにすぎないと思っている諸君も少なくないようです。ある大学の数学科の学生が，母校の高校で，数学科への進学を希望する高校生に勉強のアドバイスを求められて，「まあ，集合と論理だけは，きちんとしておいた方が良いですね」と答えたら，場内からいっせいに「一番嫌いなところだ」とため息がもれたという，笑うに笑えない話もあります。

ところで，この“必要”と“十分”ですが，数学の定義に慣れてしまえば，以後何でもなく使えるようになるはずですが，定義をきちんと覚えずに，日常生活におけるそれらの用法と結びつけて考えると，頭が混乱してしまいます。たとえば

(酒の席で)「まあもう一杯いかがですか？」「いやもう十分です」

(夕暮れの公園で)「愛があれば，お金なんか必要ないわ」

上の例で「十分です」は，「もうすでに良い気分になるために必要な分はすべていただきました」したがって「いりません」と同じ意味で使われています。この用法は，数学における使い方と微妙に違いますね。実際

“実数 a について $a>1$ であることは $a^2>1$ であるために十分である”

という用法で， $a>1$ が $a^2>1$ となるために「必要な分をすべて」表していると考えたら不都合でしょう。下の例については，ますます，説明は，必要ないでしょう。

§10 発展問題

本セクションでは，内容が数学III・Cのいくつかの単元にまたがる問題，あるいは，各単元の深い理解と粘り強い思考が要求される問題を扱う．独力で解決できなくとも，解答を熟読してしっかり理解できれば，著者達の意図は達成される．難解であれば，初読の際は読みとばす手もあろう．

B.1001

数列$\{a_n\}$は，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

によって定められるとする．

(1)　すべてのnに対し$0<a_n<1$を示せ．

(2)　すべてのnに対し，$a_n<a_{n+1}$であることを示せ．

(3)　すべてのnに対し$1-a_{n+1}<\dfrac{\pi^2}{16}(1-a_n)$が成立することを示せ．

(4)　以上を利用して$\{a_n\}$の極限値を求めよ．

解答　**(1)**　まず，$0<a_1<1$である．

あるnに対し$0<a_n<1$と仮定すると$0<\dfrac{\pi}{2}a_n<\dfrac{\pi}{2}$であって

$0<a_{n+1}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right)<1$　となる．よって，数学的帰納法により示された．■

◀ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$なら $0<\sin\theta<1$

(2)　まず，$a_2=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_1\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1}{2}=a_1$である．

ついで，あるnに対し$a_n<a_{n+1}$と仮定すると，(1)の結果より

$0<\dfrac{\pi}{2}a_n<\dfrac{\pi}{2}a_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore$　$a_{n+1}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right)<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_{n+1}\right)=a_{n+2}$

よって，数学的帰納法により示された．■

◀ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$では $\sin\theta$は増加する．

(3)　$1-a_{n+1}=1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}a_n\right)=1-\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}(1-a_n)\right\}$

$$=2\sin^2\left\{\frac{\pi}{4}(1-a_n)\right\}$$

◀ $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

◀ $1-\cos2\theta=2\sin^2\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$では$0<\sin\theta<\theta$であるから，

$$1-a_{n+1}<2\left\{\frac{\pi}{4}(1-a_n)\right\}^2=\frac{\pi^2}{8}(1-a_n)^2$$

◀ $0<\theta<\pi/2$なら $\sin\theta<\theta$ は三角関数の基本不等式

さらに，(1)，(2)より　$0<1-a_n\leqq1-a_1=\dfrac{1}{2}$だから

$$1-a_{n+1}<\frac{\pi^2}{8}(1-a_n)(1-a_n)\leqq\frac{\pi^2}{16}(1-a_n).\ ■$$

(4)　(3)と(1)の結果から

$$0<1-a_n<\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}(1-a_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ \left(\because\ 0<\frac{\pi^2}{16}<1\right)$$

$\therefore$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$　　$\therefore$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{1}.$

B.1002

無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ について，

(1)　第 n 部分和を S_n とし，$T_m=S_{2m}$ とおくと，数列 $\{T_m\}$ は増加，かつ上に有界であることを示せ．

(2)　「増加かつ上に有界な数列は収束する」ことを用いて，上の無限級数は和をもつことを示せ．

解答　(1)　初項から，2項ずつまとめてみると，

$$T_m=S_{2m}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)$$

$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

◀ 有限個なら，適当に括弧をつけてよい．

$$\therefore\quad T_{m-1}-T_m=\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}>0$$

$\therefore$　$T_{m+1}>T_m$，すなわち $\{T_m\}$ は増加数列である．

また，

$$T_m=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2m-2}-\frac{1}{2m-1}\right)-\frac{1}{2m}$$

と変形すると，この(　)の中味はすべて正であるから，

m によらず　$T_m<1$　すなわち，$\{T_m\}$ は上に有界である．■

(2)　$\{T_m\}$ は増加かつ上に有界であるから，極限値をもつ．

それを T で表すと，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}T_m=T$　……　①

さらに，S_{2m-1} を考察すると

$\displaystyle S_{2m-1}=S_{2m}+\frac{1}{2m}$ だから $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=T$　……　②

①,②より，$\{S_n\}$ は T に収束する．すなわち，和が存在する．■

研究　一般に，各項の符号が正負交互にかわる級数を**交代級数**(または**交項級数**)という．上に示したのとまったく同様の論法により，つぎの定理が証明できる．

> **[定理]**　交代級数　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ $(a_k>0)$ において，$\{a_n\}$ が単調に減少し 0 に収束するならば，この級数は和をもつ．

有名なものとしては

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots\cdots=\log 2\quad\text{(メルカトールの級数)}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}\quad\text{(ライプニッツの級数)}$$

などがある．

B.1003

α は $0<\alpha<1$ の実数とする．任意の自然数 n に対して，$2^{n-1}\alpha$ の整数部分を a_n とし，

$$2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$$

とおくと，n が奇数のとき $0\leqq b_n<\dfrac{1}{2}$，n が偶数のとき $\dfrac{1}{2}\leqq b_n<1$ になるという．このとき，α の値を求めよ．

アプローチ $2^{n-1}\alpha=a_n+b_n$ と $2^n\alpha=a_{n+1}+b_{n+1}$ を比較します．

解答
$$a_{n+1}+b_{n+1}=2^n\alpha=2\cdot 2^{n-1}\alpha=2(a_n+b_n)$$
$$=2a_n+2b_n$$

において，左辺の小数部は b_{n+1} であり，右辺の小数部は，

$$\begin{cases} 0\leqq b_n<1/2 \text{ なら } & 2b_n \\ 1/2\leqq b_n<1 \text{ なら } & 2b_n-1 \end{cases}$$

であるから，与えられた仮定を考えると，

$$b_{n+1}=\begin{cases} 2b_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 2b_n-1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

という関係が成立する．

よって，
$$b_{2k+1}=2b_{2k}-1$$
$$=2(2b_{2k-1})-1=4b_{2k-1}-1$$

となる．それゆえ，$\beta_k=b_{2k-1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおけば，

$$\beta_{k+1}=4\beta_k-1 \qquad \therefore\ \beta_{k+1}-1/3=4(\beta_k-1/3)$$

が成りたち，これより

$$\beta_k-1/3=4^{k-1}(\beta_1-1/3) \qquad \therefore\ b_{2k-1}=1/3+4^{k-1}(b_1-1/3)$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となる．いま，$b_1-1/3\neq 0$ とすると，$\{b_{2k-1}\}$ は ∞ または $-\infty$ に発散してしまうので，　$b_1=1/3$　でなければならない．

▶ $0\leqq b_n<1$ でなければならない

さらに

$$\alpha=a_1+b_1 \text{ で } 0<\alpha<1 \text{ より } a_1=0 \text{ だから}$$
$$\alpha=1/3$$

▶ a_1 は $2^0\alpha=\alpha$ の整数部分ゆえ 0

でなければならない．

逆に，$\alpha=1/3$ であると，$2^{n-1}\alpha$ の小数部分 b_n は，n が奇数のときは $b_n=1/3$，n が偶数のときは $b_n=2/3$ となり，与えられた条件をみたす．

$$\therefore\ \alpha=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

B.1004

$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ とし，複素数列をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} Z_1=0,\ Z_2=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ Z_n=Z_{n-1}+\alpha(Z_{n-1}-Z_{n-2})\ (n\geqq 3) & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} Z_n$ を求めよ．

アプローチ▷ 複素数列についての漸化式ですが，その解法は，通常の線型3項間漸化式(☞ 大学への数学Aニューアプローチ)と全く変わりません．

解答　②より，

$$Z_n-Z_{n-1}=\alpha(Z_{n-1}-Z_{n-2})\quad (n\geqq 3)$$

これは，複素数列 $\{Z_{n+1}-Z_n\}$ が公比 α の等比数列をなすことを示している．

$$\therefore\quad Z_{k+1}-Z_k=\alpha^{k-1}(Z_2-Z_1)\quad (k\geqq 1)$$

である．この両辺を，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ について加えあわせると，

$$Z_n-Z_1=(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{n-2})(Z_2-Z_1)$$

$$\therefore\quad Z_n=1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{n-2}\quad (①より)$$

$$=\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\quad \cdots\cdots\cdots ③$$

を得る．

ところで，ド・モアブルの定理により，

$$\alpha^n=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}|\alpha^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

であるので，

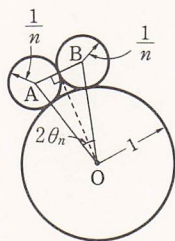
$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$$

したがって，③から，

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\boldsymbol{\frac{5+\sqrt{3}\,i}{7}}.$$

B.1005

nを自然数とする．半径$\dfrac{1}{n}$の円を互いに重なり合わないように半径1の円に外接させる．このとき，外接する円の最大個数をa_nとする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$を求めよ．

アプローチ▶　具体的にnの式で表すことのできないa_nをどのように評価する（不等式ではさむ）かが問題になります．

解答　左図のように半径1の円Cの中心Oと，円Cに外接し，かつ互いに外接する半径$1/n$の2円の中心A，Bに対し，$\angle AOB=2\theta_n$とおくと，θ_nは，$2\theta_n$が

$$OA=OB=1+1/n,\ AB=2/n$$

の二等辺三角形OABの頂角であるための条件

$$\begin{cases}\sin\theta_n=\dfrac{1/n}{1+1/n}=\dfrac{1}{n+1} & \cdots\cdots\ ①\\[2mm] 0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

で決定される．外接する円の最大個数がa_nであるとは，

ここがポイント！ ▶

$$2\theta_n\cdot a_n\leqq 2\pi<2\theta_n(a_n+1)$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{\theta_n}-1<a_n\leqq\frac{\pi}{\theta_n}\qquad\cdots\cdots\ ③$$

が成りたつことである．③より

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{\theta_n}-1\right)<\frac{a_n}{n}\leqq\frac{\pi}{n\theta_n}\qquad\cdots\cdots\ ④$$

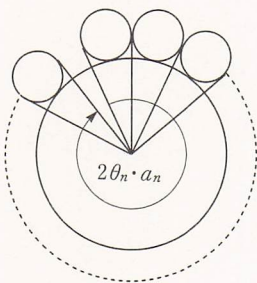
となるが，ここで，①，②より，$n\to\infty$のとき，

$$\theta_n\to 0,\ \text{したがって}\quad \frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\to 1$$

となることに注意すると，④の右辺と左辺は

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{n\cdot\theta_n}=\dfrac{1}{n\sin\theta_n}\cdot\dfrac{\pi}{\dfrac{\theta_n}{\sin\theta_n}}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{\dfrac{\theta_n}{\sin\theta_n}}\to\pi\\[4mm] \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{\theta_n}-1\right)=\dfrac{\pi}{n\theta_n}-\dfrac{1}{n}\to\pi\end{cases}$$

となる．したがって，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\boldsymbol{\pi}\quad\text{である．}$$

B.1006

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|\,dx$ 　を最小にする t の値と，I の最小値を求めよ．

アプローチ 　I の増減を知るには $\dfrac{dI}{dt}$ の符号を調べればよいのですが，$\dfrac{dI}{dt}$ を計算するには，まず I の被積分関数の絶対値をはずさなければなりません．

積分変数 x が積分区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ 内を動くとき，$\sin x-\sin t$ の符号がどうなるか考えるのが，第一のステップでしょう．

解答　積分区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x$ は増加だから，

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq t \text{ で } & \sin x\leqq\sin t \\ t\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2} \text{ で } & \sin x\geqq\sin t \end{cases}$$

$$\therefore\quad I=\int_0^t(\sin t-\sin x)\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin t)\,dx$$

$$=\Big[x\sin t+\cos x\Big]_0^t+\Big[-\cos x-x\sin t\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin t+2\cos t-1$$

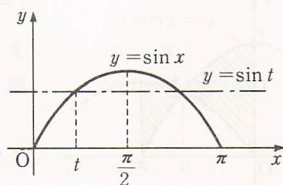
◀ x で積分する間は，t は定数扱い．

$$\frac{dI}{dt}=2\sin t+2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t-2\sin t$$

$$=2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos t$$

となるので，I の増減は右のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
dI/dt		$-$	0	$+$	0
I		↘		↗	

よって，$\begin{cases} \text{最小を与えるのは} \quad \boldsymbol{t=\dfrac{\pi}{4}} \\ \text{最小値}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1} \end{cases}$ である．

研究　上で証明したことは，“区間 $[a,\ b]$ で連続な単調関数 $f(x)$ に対し，

$I(t)=\displaystyle\int_a^b|f(x)-f(t)|\,dx$ 　$(a\leqq t\leqq b)$　は，$t=\dfrac{a+b}{2}$ のとき，最小値をとる”……　(＊)

という事実の特別の場合にほかならない．(＊)の証明も，上と同様である．

B.1007

$-\infty < x < +\infty$ で $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t - x\cos t|\,dt$ を最小にする x の値を求めよ．

アプローチ　前問と同じ趣旨ですが，今度は絶対値記号をはずすのが，やや難しいでしょう．まず，積分変数 t が $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ を変わるときの $\sin t - x\cos t$ の符号について考察します．

解答　積分区間は　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$　………①

$x\leqq 0$ とすると，①において，$\sin t - x\cos t\geqq 0$ だから，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t - x\cos t)\,dt=\Big[-\cos t - x\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x$$

よって，$x\leqq 0$ では I は減少．したがって，I を最小にする x の値を探すには，$x\geqq 0$ において考えれば十分である．

$x\geqq 0$ のとき，x の値を固定して考える．

y
$y=x\cos t$
$y=\sin t$
x
1
O
α
$\frac{\pi}{2}$
t

t の関数 $y=\sin t$，$y=x\cos t$ のグラフ（左図）より，①において，$\sin t - x\cos t = 0$ となる t がただ1つだけ存在する．それを $t=\alpha$ とおけば，$x=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$　………②

であって，
$$\begin{cases} 0\leqq t\leqq\alpha \text{ では } \sin t\leqq x\cos t \\ \alpha\leqq t\leqq\frac{\pi}{2} \text{ では } \sin t\geqq x\cos t \end{cases}$$

I は上図の斜線部の面積を表す． ▶

$$\therefore\ I=\int_0^{\alpha}(x\cos t-\sin t)\,dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t - x\cos t)\,dt$$
$$=\Big[x\sin t+\cos t\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos t - x\sin t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=x(2\sin\alpha-1)+2\cos\alpha-1$$

②を用い，x か α のどちらかに統一．α にした方が楽！ ▶

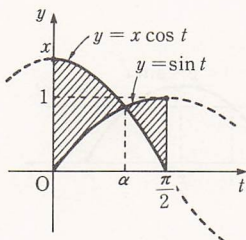
②を代入して整理すると，

$$I=\frac{2-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}-\tan\alpha-1$$

$$\frac{dI}{d\alpha}=\frac{2\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}$$

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$dI/d\alpha$		$-$	0	$+$	
I		↘		↗	

ここで，α の変域 $0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ において，I の増減は右表のようになる．よって，$\alpha=\frac{\pi}{6}$ で I は最小となる．

よって，求める x の値は，$x=\tan\frac{\pi}{6}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$．

B.1008

$f(x)=\int_0^x|\sin t|\,dt$ として，$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ．

アプローチ $f(x)$ を x の式で表そうとすると，x の値に応じて(つまり，$n\pi\leqq x<(n+1)\pi$ となる整数 n の偶・奇に応じて)分類せねばならず，少し厄介です．$\dfrac{f(x)}{x}$ を適当な不等式ではさむ(評価する)だけでよいのです．

解答 以下，x は，十分大きな正の数とし，

$n\pi\leqq x<(n+1)\pi$　　となる整数 n をとる．

$|\sin t|\geqq 0$ より，$f(x)$ は増加関数であるから，

$$f(n\pi)\leqq f(x)<f((n+1)\pi) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$|\sin t|$ は周期 π をもつので，

$$f(n\pi)=\int_0^{n\pi}|\sin t|\,dt=n\int_0^{\pi}|\sin t|\,dt$$
$$=n\int_0^{\pi}\sin t\,dt=n\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より，$n\pi\leqq x<(n+1)\pi$ では，$2n\leqq f(x)<2(n+1)$

したがって

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{2n}{x}\leqq\frac{f(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{x}\leqq\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

◀ まず，$x>0$ で割り，さらに $n\pi\leqq x<(n+1)\pi$ を用いた．

$$\therefore\quad \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{f(x)}{x}<\frac{2}{\pi}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

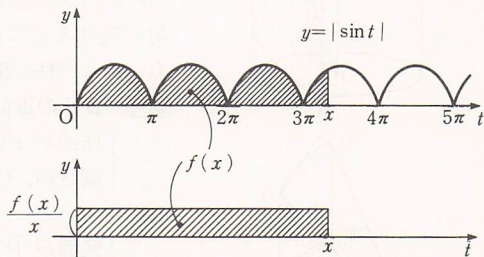
$x\to+\infty$ のとき，$n\to+\infty$ であるから，

③の左端 $\to\dfrac{2}{\pi}$，③の右端 $\to\dfrac{2}{\pi}$　$\therefore$　$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\pi}}$．

◀ はさみ打ちの原理

注意 $\dfrac{f(x)}{x}$ は，$|\sin t|$ と t 軸(横軸)で囲まれた部分の t 軸の長さ 1 あたりの面積(すなわち，区間 $0\leqq t\leqq x$ における $y=|\sin t|$ の平均の高さ)を表すので，$x\to\infty$ のときの極限は一周期分，すなわち区間 $0\leqq t\leqq\pi$ で考えたときの

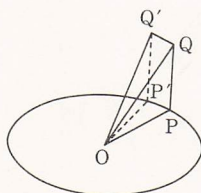
$$\frac{\int_0^{\pi}\sin t\,dt}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

と一致するわけである．

B.1009

xyz 空間において，媒介変数 $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を用いて

$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ h\theta/2\pi)$

で定められる動点 P，Q と原点 O を結ぶ三角形 OPQ の通過する立体の体積 V を求めよ．

アプローチ △OPQ の面積 S を θ で表して $\left(S=\dfrac{ah}{4\pi}\theta\right)$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} S\,d\theta$ を計算しても V は求まりません．

解答 θ が $\Delta\theta$ だけ微小変化する間に，△OPQ が掃過する立体の体積 ΔV は，左図のように

$\begin{cases} \text{底面が}\ \overline{\mathrm{PQ}}\times\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}\ \text{の長方形} \\ \text{高さが}\ \overline{\mathrm{OP}} \end{cases}$

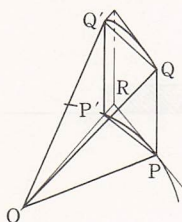
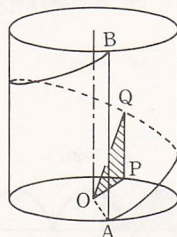
の四角すいの体積で近似できる．

$$\Delta V \fallingdotseq \frac{1}{3}\cdot\left(a\Delta\theta\cdot\frac{h}{2\pi}\theta\right)\cdot a=\frac{a^2h}{6\pi}\theta\Delta\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

そして，その誤差は $(\Delta\theta)^2$ 程度であるから，$\Delta\theta\to 0$ とすると

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{a^2h}{6\pi}\theta$$

$$\therefore\quad V=\int_0^{2\pi}\frac{a^2h}{6\pi}\theta\,d\theta=\frac{a^2h}{6\pi}\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}a^2h}.$$

注意 微小体積の近似式(＊)を作ることが本問解決の最大の key point である．ただし，近似の誤差は $(\Delta\theta)^2$ 程度であることの厳密な証明は，高校における微積分では通常，要求されない．

なお，上で体積を考えた立体は，底円の半径が a で，高さが h の円柱面上の動点 Q が，点 A $(a,\ 0,\ 0)$ を出発して円柱の内部を左手に見ながら，かつ最短距離で点 B$(a,\ 0,\ h)$ に達するように一周するとき，線分 OQ の描く曲面の下方にある円柱の部分にほかならない．

研究 ΔV の近似を厳密に議論するには，ΔV を

$\begin{cases} \text{底面が}\ \overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PP'}}\ \text{の長方形} \\ \text{高さが，O から線分 PP′ に至る距離} \end{cases}$

の四角すいと

$\begin{cases} \text{底面が}\ \overline{\mathrm{P'Q'}}\times\overline{\mathrm{PR}}\ \text{の長方形} \\ \text{高さが OP} \end{cases}$（R は，P における底円の接線と OP′ の交点）

の四角すいの体積で評価すればよい．

B.1010

空間において

$$x+y+z\leqq 2,\ x^2\leqq y,\ 0\leqq z$$

のすべてをみたす点$(x,\ y,\ z)$から成る立体の体積を求めよ．

アプローチ 座標軸に垂直な平面による切り口の面積を考察するのが定石ですが，どの座標軸に垂直な切り口が見やすいかが問題です．条件として与えられている式のうちでただ1個所2乗の形で入っているxが一定となる切り口を考えると直線のみで囲まれた図形となるので楽になりそうだと見当がつくなら，もうベテランです．

解答 平面：x＝一定 による切り口のyz平面への正射影は，

$$y+z\leqq 2-x,\ y\geqq x^2,\ z\geqq 0$$

より，yz平面上の

3直線　$y+z=2-x$ (一定)，$y=x^2$ (一定)，$z=0$

で囲まれた図形で，右図のような三角形である．

ただし，この切り口が存在するのは

$$x^2<2-x \quad \therefore \quad x^2+x-2<0 \quad \text{より}$$

$$-2<x<1$$

のときである．そして，切り口の三角形の面積$S(x)$は，

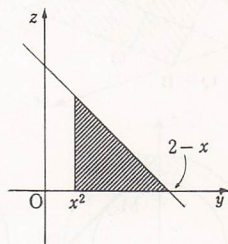
$$S(x)=\frac{1}{2}\left\{(2-x)-x^2\right\}^2=\frac{1}{2}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)$$

以上から，求める体積は，

$$V=\int_{-2}^{1}S(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4\right)-\left(-\frac{32}{5}+\frac{16}{2}+8-8-8\right)\right\}$$

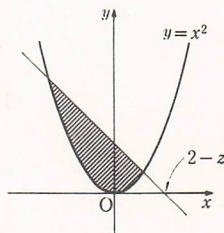
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{17}{10}-\left(-\frac{32}{5}\right)\right\}=\mathbf{\frac{81}{20}}$$

である．

注意 平面：z＝一定 での切り口のxy平面への正射影は右の図のような図形となり，その面積$T(z)$は

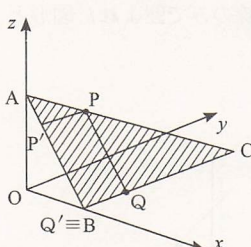
$$T(z)=\frac{1}{6}\left\{1-4(z-2)\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(9-4z)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad V=\int_0^{\frac{9}{4}}T(z)\,dz=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{9}{4}}(9-4z)^{\frac{3}{2}}dz$$

として体積を求めることもできるが，

平面：y＝一定 による切り口を考えると場合分けが必要になります．

B.1011

3点A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(1, 2, 0)を頂点とする三角形の紙がある．この紙がy軸のまわりに1回転するとき，この紙の通過する部分の体積Vを求めよ．

アプローチ まず，見取図などによって，どんな図形を回転したものかをつかみます．これができたら，あとはこの立体のy軸に垂直な平面による切り口を調べます．

解答 y軸上の点$(0, y, 0)$を通りy軸に垂直な平面αによるこの立体の切り口Kを考察する．ただし，$0 \leqq y \leqq 2$

αによる△ABCの切り口は線分PQとなり，そのxzの平面への正射影をP′Q′とすると，AP：PC$=y:2-y$ より，xz平面では$\mathrm{P}'\left(\dfrac{y}{2},\ 1-\dfrac{y}{2}\right)$, Q′(1, 0)　………①

線分PQをy軸のまわりにまわして得られる図形の面積が切り口Kの面積$S(y)$であるが，それはxz平面において，線分P′Q′をOのまわりに回転した図形の面積として求めることができる．

1)　$0 \leqq y \leqq 1$　　2)　$1 \leqq y \leqq 2$

Kは，Oから線分P′Q′上の点にいたる距離の最大値R，最小値rをそれぞれ半径とする2つの同心円で囲まれた部分だから

$S(y)=\pi(R^2-r^2)$　………②

さて，Oから直線P′Q′にひいた垂線の足をMとする

1)　$0 \leqq y \leqq 1$ なら，Mは線分P′Q′上にあり

$R=\mathrm{OQ}'=1,\ r=\mathrm{OM}=1/\sqrt{2}$

$\therefore\ S(y)=\pi\left\{1^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\dfrac{\pi}{2}$　………③

2)　$1 \leqq y \leqq 2$ なら，Mは線分P′Q′の延長上にあり，

①を用いた ▶

$R=\mathrm{OQ}'=1,\ r=\mathrm{OP}'=\sqrt{\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2}$

$\therefore\ S(y)=\pi\left\{1^2-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2\right\}=\pi\left(y-\dfrac{y^2}{2}\right)$　………④

以上より，求める体積は，

$$V=\int_0^2 S(y)\,dy=\int_0^1\frac{\pi}{2}\,dy+\int_1^2\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left[\frac{\pi}{2}y\right]_0^1+\left[\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$$

B.1012

放物線 $y=\dfrac{3}{4}-x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面Kの方程式は $y=\dfrac{3}{4}-(x^2+z^2)$ であるが，この曲面Kを，原点を通り回転軸と45°の角をなす平面Hで切る．曲面KとHで囲まれた立体の体積を求めよ．

解答　平面Hの方程式は $y=x$ としてよい．

この立体を平面Hに平行な平面 H_k

$$y=x+k \quad (k \text{ は定数}) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

で切った切り口を考える．①と曲面Kの方程式

$$y=\frac{3}{4}-(x^2+z^2) \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

と連立し y を消去すると

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=1-k \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

となるので，切り口 L_k の xz 平面の正射影③は円であり，したがって，L_k 自身は「楕円」である．

円③の面積は $\pi(1-k)$ で，

L_k は xz 平面と45°傾いているのだから，切り口の楕円 L_k の面積 S_k は，

$$S_k=\sqrt{2}\,\pi(1-k)$$

である．平面 H_k と平面 $H_{k+\Delta k}$ (Δk は小さな正数) との距離 Δh は

$$\Delta h=\Delta k/\sqrt{2}$$

となる．そこで平面 H_k，$H_{k+\Delta k}$ と曲面で囲まれる部分の体積は，

$$\Delta V=S_k\Delta h=\pi(1-k)\Delta k$$

で近似される．k の変域は $0\leqq k\leqq 1$ であるから

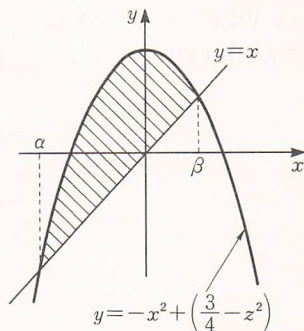
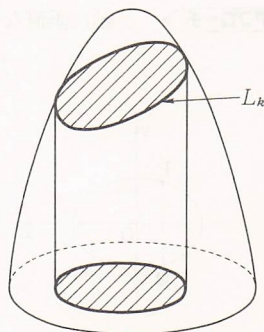
求める体積は，　$V=\pi\displaystyle\int_0^1(1-k)\,dk=\pi\left[k-\frac{k^2}{2}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

◀ $\Delta V=S_k\Delta k$
$V=\displaystyle\int_0^1\sqrt{2}\,\pi(1-k)\,dk$
と誤まりやすい．

注意　平面 $z=$(一定) による切り口の xy 平面への正射形は，右の図のような形となり，その面積Sは，

$$S=\int_\alpha^\beta -\left\{x^2+x+\left(z^2-\frac{3}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{4}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$$

となる．これから　$V=\dfrac{8}{3}\displaystyle\int_0^1(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz$　としても求められる．

B.1013

水平におかれた xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の y 軸に平行な弦をPQとする．PQを1辺とする正三角形PQRを楕円の平面と垂直上方に作る．そうして弦PQを楕円の左端から右端まで動かすとき，このようにして作った正三角形PQRが通過する部分の体積 V を求めよ．

アプローチ x 軸に垂直な平面による立体の切り口が正三角形です．

解答 楕円の方程式より

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

したがって，P，Qの x 座標（これは等しい）を X とすればP，Qの y 座標 Y は

$$Y^2=b^2\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)$$

をみたし，

$$\overline{PQ}^2=4Y^2=4b^2\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)$$

となり，正三角形PQRの面積 S は，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PQ}^2=\sqrt{3}\,b^2\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)$$

である．

そして，PQが $x=X$ から $X+\varDelta X$ まで動く間に，正三角形PQRが通過する部分の体積 $\varDelta V$ は

$$\varDelta V=S\varDelta X=\sqrt{3}\,b^2\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)\varDelta X$$

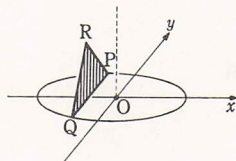
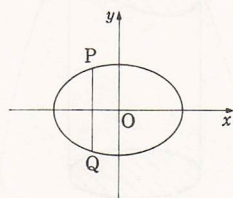
で近似される．

$-a\leqq X\leqq a$ と考えてもよい．

▶ X は $-a<x<a$ の範囲を動くから

$$V=\int_{-a}^{a}\sqrt{3}\,b^2\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)dX$$

$$=2\sqrt{3}\,b^2\int_0^a\left(1-\frac{X^2}{a^2}\right)dX$$

$$=2\sqrt{3}\,b^2\left[X-\frac{X^3}{3a^2}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}ab^2}.$$

B.1014

区間 $0<x\leqq a$ において連続な関数が，区間 $0\leqq x\leqq a$ において連続でなくても，$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a f(x)\,dx$ が存在するならば，この値を $\int_0^a f(x)\,dx$ と定義する．極限値が存在しないときは，積分も定義されない．このとき，つぎの各積分を求めよ．

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$　　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx$

解答　以下，ε を十分小さな正の数とする．

(1) $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=2(1-\sqrt{\varepsilon})\to 2\ (\varepsilon\to+0)$

$\therefore\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\mathbf{2}.$

(2) $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1=\frac{1}{\varepsilon}-1\to\infty\ (\varepsilon\to+0)$

よって，$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ **は存在しない．**

(3) $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx$

$$=\left[\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\log|x|\right]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\log\frac{\pi}{2}-\log\left|\frac{\tan\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon}\right|$$

ここで

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\log\left|\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\varepsilon}\right|=\log\left\{\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\varepsilon}\right\}$$

$$=\log\left\{\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\varepsilon/2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

であるから

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx=\mathbf{\log\frac{4}{\pi}}.$

B.1015

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(x)\,dx$ が存在するとき，この値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ と定義する．

この定義にもとづいて，つぎの定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}dx$（$a$ は正の定数）　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

解答 (1) $\displaystyle\int_0^X e^{-ax}dx=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^X=\frac{1}{a}(1-e^{-aX})$

ここで，$a>0$ だから $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}(-aX)=-\infty$ で，

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty}e^{-aX}=0$ である．

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{a}(1-e^{-aX})=\boldsymbol{\frac{1}{a}}.$$

(2) $x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta},\quad x^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{x^2+1}=d\theta$$

$x=0$ は $\theta=0$ に対応するが，任意の正数Xに対し，

$\tan\theta=X\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる θ の値をTとおくと，

$$\int_0^X\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^T d\theta=T$$

となる．しかも

$$x\to\infty\ \text{となるのは}\ T\to\frac{\pi}{2}$$

のときであるから

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{X\to\infty}\int_0^X\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\lim_{T\to\frac{\pi}{2}}T=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}.$$

注意 e^{-ax} の逆関数は $-\dfrac{1}{a}\log x$ であることを考えれば，(1)で求めた積分値は

$\displaystyle\int_0^1\frac{-1}{a}\log x\,dx$ にも等しい．☞B．1014

B.1016

$p \geqq 0$ のとき，$F(p)=\int_0^{\infty} x^p e^{-x}dx=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T x^p e^{-x}dx$ ………①

が存在することが知られている．この $F(p)$ に対し

(i) $F(p+1)=(p+1)F(p)$　(ii) n が自然数なら $F(n)=n!$

となることを示せ．

ただし，$\lim_{T\to+\infty} T^k e^{-T}=0$ (k は定数) は既知とする．

解答 $F(p+1)=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T x^{p+1}e^{-x}dx$ …… ② である．

この右辺の積分を部分積分する．

$$\int_0^T x^{p+1}e^{-x}dx=\left[(-e^{-x})x^{p+1}\right]_0^T-\int_0^T(-e^{-x})(x^{p+1})'dx$$

$$=-T^{p+1}e^{-T}+(p+1)\int_0^T x^p e^{-x}dx \quad \cdots\cdots ③$$

(i) ③において $T\to+\infty$ の極限を考えると，$T^{p+1}e^{-T}\to 0$ であるから，①，②より

$$F(p+1)=(p+1)F(p) \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる．■

(ii) n が自然数なら，④を繰り返しつかうと，

$$F(n)=nF(n-1)=n(n-1)F(n-2)=\cdots\cdots$$
$$=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1\cdot F(0)=n!F(0) \quad \cdots\cdots ⑤$$

一方，

$$F(0)=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-t}dt=\lim_{T\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^T=\lim_{T\to+\infty}(1-e^{-T})=1 \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥より

$$F(n)=n!. \ ■$$

研究 (ii)で示したことから $F(p)$ は，階乗 $p!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-1)\cdot p$ を整数以外の p にまで拡張したものである．$\Gamma(p)=F(p-1)$ で定義される $\Gamma(p)$ を，オイラのガンマ関数と呼ぶ．ガンマ関数と B. 419 で扱ったベータ関数との間には

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

という関係が成立する．これは，p，q が自然数の場合には二項係数の公式

$$\frac{1}{(p+q-1)_{p+q-2}C_{p-1}}=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$ に相当する．

B.1017

a を正の整数とするとき，

$$U=\int_0^{\infty} e^{-at}\cos t\,dt=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-at}\cos t\,dt$$

$$V=\int_0^{\infty} e^{-at}\sin t\,dt=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-at}\sin t\,dt$$

のいずれもが存在することを示し，それらを求めよ．

解答　$u(x)=\int_0^x e^{-at}\cos t\,dt$，$v(x)=\int_0^x e^{-at}\sin t\,dt$ とおく．

部分積分法を用いると，

$$u(x)=\int_0^x\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)'\cos t\,dt$$

$$=\left[-\frac{e^{-at}}{a}\cos t\right]_0^x-\int_0^x\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)(-\sin t)\,dt$$

$$=-\frac{e^{-ax}}{a}\cos x+\frac{1}{a}-\frac{1}{a}v(x) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

第2項の積分をさらに適当な部分積分して③を導くことも可能である．▶ ☞B. 422

全く同様の部分積分法によって，

$$v(x)=-\frac{e^{x}}{a}\sin x+\frac{1}{a}u(x) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が得られる．

①，②を $u(x)$，$v(x)$ の連立1次方程式とみて解くと，

$$\begin{cases} u(x)=\dfrac{a+e^{-ax}\sin x-ae^{-ax}\cos x}{1+a^2} & \cdots\cdots\cdots ③ \\[2ex] v(x)=\dfrac{1-e^{-ax}\cos x-ae^{-ax}\sin x}{1+a^2} & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

ここで，

$$\begin{cases} 0\leqq |e^{-ax}\sin x|\leqq e^{-ax} \\ a>0 \text{ より } \lim_{x\to+\infty} e^{-ax}=0 \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\sin x=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

はさみ打ちの定理 ▶

同様に $\lim_{x\to+\infty} e^{-ax}\cos x=0$ ⋯⋯⋯ ⑥

③，④，⑤，⑥より，$\lim_{x\to+\infty} u(x)$，$\lim_{x\to+\infty} v(x)$ が存在し，

$$U=\lim_{x\to+\infty} u(x)=\boldsymbol{\frac{a}{1+a^2}},\quad V=\lim_{x\to+\infty} v(x)=\boldsymbol{\frac{1}{1+a^2}}$$

となる．

B.1018

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\lim_{\substack{u\to-\infty\\ v\to\infty}}\int_u^v e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

であることを既知として，つぎの各極限を求めよ．

(1)　$p\to-\infty$，$q\to+\infty$ のときの $J_{p,q}=\displaystyle\int_p^q e^{-x^2+x}dx$ の極限値 J

(2)　$\alpha\to+0$，$\beta\to+\infty$ のときの $K_{\alpha,\beta}=\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x}dx$ の極限値 K

アプローチ　e^{-x^2} の原始関数を見つけようとしても無理です．

解答　(1)　$-x^2+x=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ であるから

$$e^{-x^2+x}=e^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

◀ この変形がカギ．$e^{-x^2+x}=e^{-x^2}\cdot e^x$ として，部分積分をしようとしてもうまくいかない．

と書ける．そこで，$J_{p,q}$ において

$$x-\frac{1}{2}=t,\ p-\frac{1}{2}=u,\ q-\frac{1}{2}=v$$

とおくと，

$$dx=dt$$

であるから，

$$J_{p,q}=e^{\frac{1}{4}}\int_u^v e^{-t^2}dt$$

$p\to-\infty$，$q\to+\infty$ は $u\to-\infty$，$v\to+\infty$ に対応するので，

$$J=\sqrt[4]{e}\sqrt{\pi}.$$

(2)　$K_{\alpha,\beta}$ において，$x=e^t$ と置換すると，

◀ この置換がカギ．

$$\frac{1}{x}=e^{-t},\ \log x=t,\ dx=e^t dt$$

であるので，$p=\log\alpha$，$q=\log\beta$ とおくと，

$$K_{\alpha,\beta}=\int_{\log\alpha}^{\log\beta}(e^{-t})^t\cdot e^t dt=\int_p^q e^{-t^2+t}dt=J_{p,q}$$

◀ $(e^{-t})^t=e^{-t^2}$

である．そして

$$\alpha\to+0,\ \beta\to+\infty \text{ のとき } p\to-\infty,\ q\to+\infty$$

となるので，

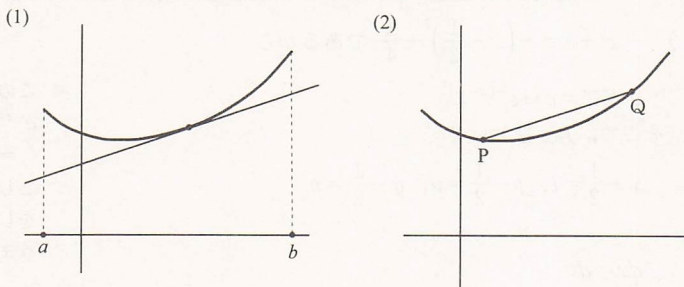
$$K=J=\sqrt[4]{e}\sqrt{\pi}.$$

B.1019

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ において増加しているとする．このとき，次の2つが成立することを示せ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ のこの区間における部分は，この区間内の任意の点における接線の上方にある．

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の2点P, Qを結ぶ線分は，曲線のP, Qの間の部分の上方にある．

アプローチ　(1), (2)はそれぞれ，下に凸である曲線が

のようになっている，ということである．

解答　(1)　区間内の任意の点 α をとる．

点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

と表される．

よって

$$g(x)=f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)$$

が $a \leqq x \leqq b$ でつねに $g(x) \geqq 0$ をみたすことを示せばよい．

$$g(\alpha)=0, \qquad g'(x)=f'(x)-f'(\alpha)$$

であり，$f'(x)$ が増加関数であることに注意すると，$g(x)$ の増減表は

x	a		α		b
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

となる．これより，$a \leqq x \leqq b$ において，つねに $g(x) \geqq 0$ となることがわかる．■

（2） $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ とおく．
ただし，　$a \leqq \alpha < \beta \leqq b$　とする．
P，Q を結ぶ直線の方程式は

$$y=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

となる．よって

$$h(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

が　$\alpha \leqq x \leqq \beta$ においてつねに　$h(x) \leqq 0$ となっていることを示せばよい．

$$h(\alpha)=h(\beta)=0$$

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

である．

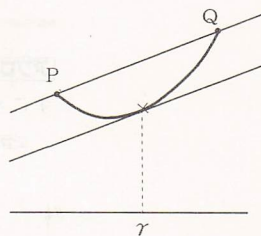
　ここで，平均値の定理より，

$$f'(\gamma)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha},\ すなわち\ h'(\gamma)=0$$

をみたす γ が α と β の間に存在することと，
$f'(x)$ が増加関数であることに注意すると，
$h(x)$ の増減表は

◀ $f'(x)$ は増加関数なので，このような γ は実は1つしかない．

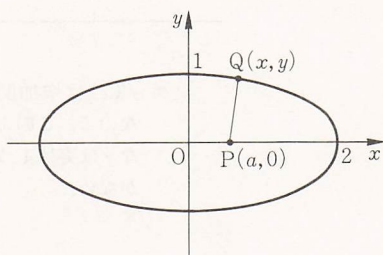
x	α		γ		β
h'		$-$	0	$+$	
h	0	↘		↗	0

となる．よって　$a \leqq x \leqq b$ において，つねに $h(x) \leqq 0$
となることがわかる．■

B. 1020

x 軸上の点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ $(0 \leqq a < 2)$ を中心とし，楕円 $x^2+4y^2=4$ ………① に含まれる円の最大半径 r を次の幾何学的事実に基づいて求めよ．

> 点Pと楕円①上の動点Qを結ぶ線分PQの長さの最小値が，題意を満たす円の半径になる．

アプローチ $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおき，PQ^2 を $x,\ y$ で，さらに，x だけで表すことはたやすいでしょう．あとは，2次関数の処理です．

☞ 大学への数学Ｉニューアプローチ B. 105，B. 106

解答 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2=(x-a)^2+y^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

であり，Qが楕円①上の点であることから，

$$y^2=1-\frac{x^2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

であるので，③を②に代入して y を消去すると，

$$\mathrm{PQ}^2=(x-a)^2+1-\frac{x^2}{4}$$

$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+1-\frac{a^2}{3} \quad \cdots\cdots\cdots ②'$$

③を満たす実数 y が存在するための条件．▶

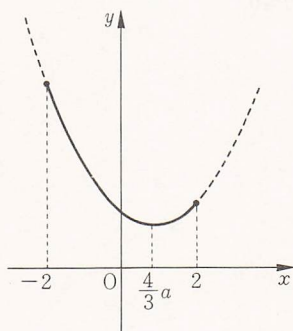
となる．ここで，x の変域は，$1-\dfrac{x^2}{4} \geqq 0$ から，

$$-2 \leqq x \leqq 2 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

である．

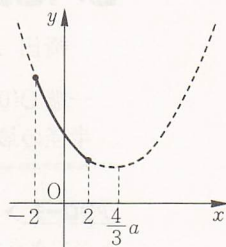
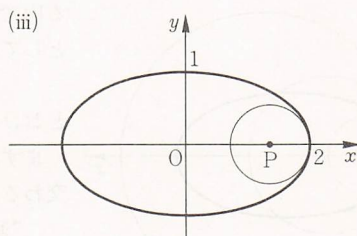
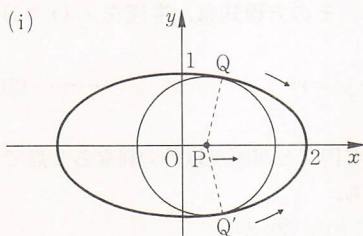
よって，②′の右辺を $f(x)$ とおき，関数 $y=f(x)$ のグラフの対称軸：$x=\dfrac{4}{3}a$ が④の範囲に入るか否かで分類をする．

(i)　$0 \leqq \dfrac{4}{3}a \leqq 2$ のとき，

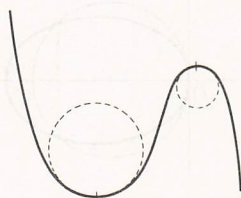
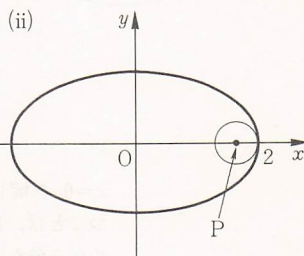
$$f(x) \text{ の最小値} = f\left(\frac{4}{3}a\right)=1-\frac{a^2}{3}$$

(ii)　$\frac{4}{3}a>2$ のとき

$f(x)$ の最小値$=f(2)=(2-a)^2$

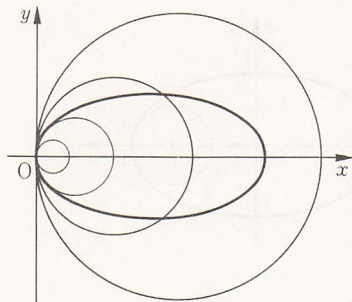
以上より，求める最大半径 r は，

$$r=\begin{cases}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{3}}\ \left(0\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}\right) & \cdots\cdots\ \text{(i)}\\ |2-a|=2-a\ \left(\dfrac{3}{2}<a<2\right) & \cdots\cdots\ \text{(ii)}\end{cases}$$

［注］　1°　P(a, 0) を中心とする半径 r の円は，楕円①に接している．

a の値が大きくなるにつれて，この円は右に移動し，2 接点 Q，Q′ が近づいてゆく[(i)]．すると，ある a の値のときにQ，Q′ は点(2，0)に一致し[(iii)]，さらに a の値を大きくすると，この円は点(2，0)で接する状態を保ちながら，半径がどんどん小さくなってゆく[(ii)]．

2°　曲線が曲がり方の度合い（曲率）を示すのに，曲線の微小部分を円弧と見なし，その円弧の半径の大・小を，曲がり方の緩・急の指標として使おうという考え方がある．これは，大学で学ぶ曲率円・曲率半径の概念であり，高速道路のカーブで，“R＝400 m” などという表示を見た人も多いであろう．

曲率円を定義する方法はいろいろある（☞B. 213）が，本問の場合分けの境い目 $a=\frac{3}{2}$ のときの $r=\frac{1}{2}$ が楕円①の点 (2，0) における曲率円の半径としてふさわしいものであることは，(iii)の図から納得できるであろう．つまり，(ii)も(iii)の場合も，円は楕円①に点 (2，0) で接しているが，(iii)の場合が，“最もぴったりと” 接しているのである．

B. 1021

楕円 $E: \dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ ……① の長軸の一端O(0, 0)でEに接する円で，Eからはみ出さないものの半径の最大値を求めよ．

アプローチ 考えるべき円の方程式は，半径rを与えればすぐ書くことができます．あとは，これと①との連立方程式の処理です．

解答 点Oで楕円Eに接する円は，Oでy軸に接する円であるから，その方程式は，半径を$r\ (r>0)$として，

$$(x-r)^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

とおける．

まず，楕円①と円②とが原点以外の異なる2点で交わる，すなわち，

"連立方程式{①，②}が

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の実数解をもつ"

ようなrの条件を求めよう．

②より，$y^2=x(2r-x)$ ……②′

②′を①に代入してyを消去すると，

$$\frac{(x-a)^2-a^2}{a^2}+\frac{x(2r-x)}{b^2}=0$$

$\therefore\ x=0$ または $x=\dfrac{2a(ar-b^2)}{a^2-b^2}$ となる．

$x=0$ を解にもつことは，はじめから分かっている．

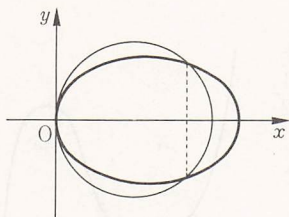
$x=0$ は，①，②の自明な共有点O(0, 0)と対応するので，もう一方のxの値

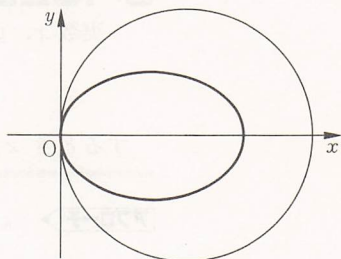
$$x=\frac{2a(ar-b^2)}{a^2-b^2} \quad \cdots\cdots ③$$

を②′に代入したとき，2個の実数値yが定められるべきである．したがって③の値は，

$x(2r-x)>0 \quad \therefore\ 0<x<2r$

を満たすものでなければならない．

$$\therefore\ 0<\frac{2a(ar-b^2)}{a^2-b^2}<2r \quad \therefore\ \frac{b^2}{a}<r<a.$$

したがって，この条件が成り立たないとき，まず，$r \geqq a$ のときは，楕円Eが円②に点Oで内接し（右上図），$0<r \leqq \dfrac{b^2}{a}$ のときは，円②が，楕円Eに点Oで内接する（右下図）．

ゆえに，求める円の半径の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a}}$ である．

［注］ 1°　本問で求めた円の半径が，楕円EのOにおける曲率半径であることは，そのときの円が，"最もぴったりと" 接していることから納得できる．また，この半径は，③をrについて解いた式

$r=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}x+b^2\right)$ において，$x \to 0$ のときの極限値 $\lim\limits_{x\to 0} r$ からも得られる．これが，曲率半径の求め方の１つである．（☞大学への数学Ⅱニューアプローチ p.176）

2° 別解　円②が楕円①からはみ出さないということは

"$(x-r)^2+y^2=r^2$ ならば，つねに $\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$"　………　（＊）

が成り立つということである．

$(x-r)^2+y^2=r^2$ が成りたつときは，$y^2=x(2r-x)$ であるから，

$\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ が成立することは，

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{x(2r-x)}{b^2} \leqq 1 \quad \therefore \quad x\{(a^2-b^2)x-2(a^2r-ab^2)\} \geqq 0$$

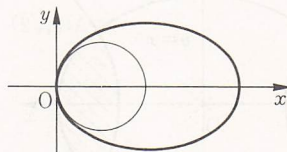
が成立することと同じである．それゆえ，（＊）は，

"$0 \leqq x \leqq 2r$ ならば，つねに $x\{(a^2-b^2)x-2(a^2r-ab^2)\} \geqq 0$"

が成立すること，したがって，

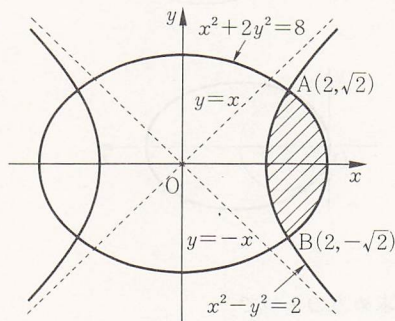
$$\frac{2(a^2r-ab^2)}{a^2-b^2} \leqq 0 \qquad \therefore \quad r \leqq \frac{b^2}{a}$$

となることと必要十分である．

ゆえに，求める円の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a}}$ である．

B. 1022

実数 x，y が $\begin{cases} x^2+2y^2 \leqq 8 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x^2-y^2 \geqq 2 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x>0 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$ を満たして変化

するとき $z=x+y$ ……④ の最大値，最小値を求めよ．

アプローチ z のとり得る値とは，①，②，③，④をともに満たす実数 x，y が存在するような z の値です．

解答 ①，②，③をともに満たす点 (x, y) の存在範囲は，左図の斜線部である．

z のとり得る値は，

"直線 $x+y=z$ ……④ が，左の斜線部と共有点をもつ"

ような z の値である．

④は傾き -1 の直線であるが，一方

$\begin{cases} \text{楕円 } x^2+2y^2=8 \text{ ……①}' \text{ の点 } A(2, \sqrt{2}) \text{ における接線の傾き}=-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}>-1, \\ \text{双曲線 } x^2-y^2=2 \text{ ……②}' \text{ の点 } B(2, -\sqrt{2}) \text{ における接線の傾き}=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}<-1 \end{cases}$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_1, y_1) での接線は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ であるので，$y_1 \neq 0$ のとき，傾き$=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$．

上の領域と直線④が共有点をもつ限界が微妙なところで，そこをきちんと調べることが大切である．

であるから，

(i) z が最大となるのは，直線④が，楕円弧 AB と接するとき，つまり，①′と④から y を消去して得られる x の方程式

$$3x^2-4zx+2(z^2-4)=0$$

が，$x>0$ の重解をもつときであるので，

$\begin{cases} \text{判別式}/4=4z^2-3\cdot 2(z^2-4)=0 \\ \text{重解}=2z/3>0 \end{cases}$

から，$z=2\sqrt{3}$ のときとなり，

(ii) z が最小となるのは，直線④が，点 $B(2, -\sqrt{2})$ を通るとき，つまり，$z=2-\sqrt{2}$ のときである．

以上より，z の

$\begin{cases} \textbf{最大値}=2\sqrt{3} \\ \textbf{最小値}=2-\sqrt{2} \end{cases}$ である．

B. 1023

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，2次方程式 $\det(xE-A)=0$ が異なる実数解 α，β をもつとする．

$$P=\frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E),\quad Q=\frac{-1}{\alpha-\beta}(A-\alpha E)$$

とおくとき，次の各式が成立することを示せ．

(1)　$P+Q=E$，$QP=PQ=O$，$P^2=P$，$Q^2=Q$

(2)　$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$ ……(＊)　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

解答　(1)　$\det(xE-A)=(x-a)(x-d)-bc=0$　◀ det の定義 A 8.9 Ⅱ

$\therefore\quad x^2-(a+d)x+ad-bc=0$

の2解が α，β であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a+d,\quad \alpha\beta=ad-bc \ \cdots\cdots\cdots ①$$

$$P+Q=\frac{1}{\alpha-\beta}(-\beta E+\alpha E)=E \ \cdots\cdots\cdots ②$$

$$PQ=\frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}\{A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E\}$$

$$=\frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}\{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E\}$$　◀ ①を代入した．

$=O$　(∵ケーリー・ハミルトンの定理)　◀ A 8.8 Ⅱ

同様に，$QP=O$.

②の両辺に P を左からかけて，

$$P^2+PQ=P \qquad \therefore\quad P^2=P$$

同様に Q をかけて，　$Q^2=Q$　■

(2)　$n=1$ のときの成立は，次式より明らか．

$$\alpha P+\beta Q=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}(A-\beta E)-\frac{\beta}{\alpha-\beta}(A-\alpha E)=A$$

次に，ある自然数 m に対して，$A^m=\alpha^mP+\beta^mQ$ が成立したとすると

$$A^{m+1}=A^m\cdot A=(\alpha^mP+\beta^mQ)(\alpha P+\beta Q)$$
$$=\alpha^{m+1}P^2+\alpha^m\beta PQ+\alpha\beta^mQP+\beta^{m+1}Q^2$$
$$=\alpha^{m+1}P+\beta^{m+1}Q \qquad (∵(1)の各式)$$

となるので，$m+1$ についても成立する．

よって，数学的帰納法により任意の自然数 n に対して，(＊)は成立する．■

B. 1024

2次の不定方程式　(P)　$x^2-3y^2=1$　を考える．

また，$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$ として $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$

$(n\geqq 2)$ によって x_n，y_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を定める．

(1)　$x=x_n$，$y=y_n$ は (P) の解であることを示せ．

(2)　(P) を満足する任意の正の整数の組 $(x,\ y)=(\alpha,\ \beta)$ に対し，$A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$ で α'，β' を定めると，次のことがらが成りたつことを示せ．

$\begin{cases}\text{i)}\quad (x,\ y)=(\alpha',\ \beta')\ \text{も}\ (P)\ \text{の整数解である．}\\ \text{ii)}\quad 0<\alpha'<\alpha,\ \ 0\leqq\beta'<\beta\end{cases}$

(3)　(P) を満足する負でない整数解は，
$(x,\ y)=(x_n,\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に限られることを示せ．

アプローチ　(1)の証明には，数学的帰納法が有効です．(3) 任意の (P) の負でない整数解 $(\alpha,\ \beta)$ が $(x_n,\ y_n)$ のいずれかと一致することを示せればよいのですが，……．

解答　(1)　数学的帰納法で証明する．

$n=1$ のときは，$1^2-3\cdot 0^2=1$ より明らか．

ある自然数 m に対して，$(x,\ y)=(x_m,\ y_m)$ が (P) の解であったとする．つまり

$$x_m{}^2-3y_m{}^2=1 \quad\cdots\cdots\ ①$$

一方，$\begin{pmatrix}x_{m+1}\\y_{m+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_m+3y_m\\x_m+2y_m\end{pmatrix}$

であるから，

$$x_{m+1}{}^2-3y_{m+1}{}^2=(2x_m+3y_m)^2-3(x_m+2y_m)^2$$
$$=x_m{}^2-3y_m{}^2=1 \quad\cdots\cdots\ ②$$

であり，$(x,\ y)=(x_{m+1},\ y_{m+1})$ も (P) の解となる．

結局，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，
$(x,\ y)=(x_n,\ y_n)$ は (P) の解である．■

(2)　$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}$ だから $\begin{cases}\alpha'=\ 2\alpha-3\beta\\ \beta'=-\alpha+2\beta\end{cases}$

$\cdots\cdots\ ③$

i）　α，β が整数だから，α'，β' も整数であり，

$$\alpha'^2-3\beta'^2=(2\alpha-3\beta)^2-3(-\alpha+2\beta)^2$$
$$=\alpha^2-3\beta^2=1$$

◀ $(\alpha,\ \beta)$ は (P) の解である．

より，$(x,\ y)=(\alpha',\ \beta')$ も (P) の整数解である．

ii）　$\alpha>0$ より，$\alpha=\sqrt{3\beta^2+1}$ であり，β は正の整数だから，③より

$$\begin{cases} \alpha'=2\alpha-3\beta=\sqrt{12\beta^2+4}-\sqrt{9\beta^2}>0 \\ \alpha-\alpha'=3\beta-\alpha=\sqrt{9\beta^2}-\sqrt{3\beta^2+1}>0 \\ \beta'=-\alpha+2\beta=\sqrt{4\beta^2}-\sqrt{3\beta^2+1}\geqq 0 \\ \beta-\beta'=\alpha-\beta=\sqrt{3\beta^2+1}-\sqrt{\beta^2}>0 \end{cases}$$

◀ $2\alpha=2\sqrt{3\beta^2+1}$
$=\sqrt{12\beta^2+4}$，

◀ $\beta\geqq 1$ より
$4\beta^2\geqq 3\beta^2+1$

が得られる．

$$\therefore\quad 0<\alpha'<\alpha,\ 0\leqq\beta'<\beta$$

（3）　(P) の任意の負でない整数解 $(\alpha,\ \beta)$ をとる．

　$\beta=0$ のとき $\alpha^2=1$ より $\alpha=1$ となり，$(\alpha,\ \beta)$ は $(x_1,\ y_1)$ と一致する．

　$\beta>0$ のとき，α も当然正であるから，(2)の $(\alpha',\ \beta')$ を求める操作を繰り返すことにより，(P) の整数解の列

$$(\alpha_1,\ \beta_1),\ (\alpha_2,\ \beta_2),\ (\alpha_3,\ \beta_3),\ \cdots\cdots$$

◀ (2)の $(\alpha',\ \beta')$ を $(\alpha_1,\ \beta_1)$ と表す．$(\alpha_1,\ \beta_1)$ から得られる $(\alpha_1',\ \beta_1')$ が $(\alpha_2,\ \beta_2)$．

が得られるが

$$\alpha>\alpha_1>\alpha_2>\ \cdots\cdots\ >0$$
$$\beta>\beta_1>\beta_2>\ \cdots\cdots\ \geqq 0$$

であることから，必ず $\beta_k=0$ となる正の整数 k が存在し，この操作は終了する．

◀ β より小さい自然数は有限個しかない．

　$\beta_k=0$ のとき $(\alpha_k,\ \beta_k)=(1,\ 0)$ であり，これは $(x_1,\ y_1)$ と一致する．

また，$\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_{i-1}\\ \beta_{i-1}\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}\alpha_{i-1}\\ \beta_{i-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}$

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，ただし $(\alpha_0,\ \beta_0)=(\alpha,\ \beta))$ であることを考え合せると

$$(\alpha_{k-1},\ \beta_{k-1})=(x_2,\ y_2),\ (\alpha_{k-2},\ \beta_{k-2})=(x_3,\ y_3)$$
$$\cdots\cdots,\ (\alpha,\ \beta)=(\alpha_0,\ \beta_0)=(x_{k+1},\ y_{k+1})$$

が成り立つことがわかる．結局，$(\alpha,\ \beta)$ は

$(x_n,\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のいずれかに等しい．■

B. 1025

$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ とする．

(1) $A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ かつ $\vec{p}\neq\vec{0}$ を満たす $\vec{p}$ が存在するような実数 λ の値は2つあることを示せ．

また，この値を $\lambda=\lambda_1$，λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$ とするとき，λ_1，λ_2 に対応するベクトル $\vec{p}=\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$ を1つずつ示せ．

(2) $A^n\vec{p}_1$，$A^n\vec{p}_2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を求めよ．さらに，これを利用して，A^n を求めよ．

アプローチ (1) 連立方程式が $\vec{0}$ 以外の解をもつ条件 (B. 809) を思い出そう．

解答 (1) $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とおく．$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ とは

$(A-\lambda E)\vec{p}=\vec{0}$，すなわち

$$\begin{cases}(1-\lambda)x-\quad 2y=0\\ x+(4-\lambda)y=0\end{cases}\quad\cdots\cdots\ ①$$

▶ *cf*. B. 809

である．①が $\vec{p}\neq\vec{0}$ なる解 x，y をもつ条件は

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-(-2)\cdot 1=0$$

である．これより

$$(\lambda-2)(\lambda-3)=0,\qquad \therefore\ \lambda=2 \text{ または } 3.$$

$\lambda=\lambda_1=2$ のとき，①は $x+2y=0$ と同値

だから，$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ ととれる．

同様に，$\lambda=\lambda_2=3$ のとき，①は $x+y=0$ と同値

だから，$\vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ ととれる．

▶ $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}2t\\ -t\end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$，$\vec{p}_2=\begin{pmatrix}s\\ -s\end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$ でもよい．

$$\therefore\ \boldsymbol{\lambda_1=2,\ \vec{p}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix};\ \lambda_2=3,\ \vec{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}$$

(2) 一般に $A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ が成り立つとき，

$$A^2\vec{p}=A(A\vec{p})=A(\lambda\vec{p})=\lambda A\vec{p}=\lambda^2\vec{p}$$

$$A^3\vec{p}=A(A^2\vec{p})=A(\lambda^2\vec{p})=\lambda^2 A\vec{p}=\lambda^3\vec{p},$$

$\cdots\cdots$

▶ 気になる人は，数学的帰納法を用いればよい．

と繰り返すことにより，

$$A^n\vec{p}=\lambda^n\vec{p}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

が得られる．

この場合，

$$A\vec{p}_1=2\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2=3\vec{p}_2$$

であるから，

$$\begin{cases} A^n\vec{p}_1=2^n\vec{p}_1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ A^n\vec{p}_2=3^n\vec{p}_2 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

となる．

$$A^n\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -2^n \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ②'$$

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^n \\ -3^n \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

◀一般に $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}$ はまとめて $A\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

をまとめると

$$A^n\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ -2^n & -3^n \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

となる．

④の両辺に $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ を右から掛けると

$$A^n=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ -2^n & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{2^{n+1}-3^n} & \mathbf{2^{n+1}-2\cdot 3^n} \\ \mathbf{-2^n+3^n} & \mathbf{-2^n+2\cdot 3^n} \end{pmatrix}$$

が得られる．

[注]　1°　$\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$ として $\vec{p}_1=\begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix}$ $(t\neq 0)$，$\vec{p}_2=\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}$ $(s\neq 0)$ をとったとしても，(2)の結果に影響しないことを確かめよ．

2°　$\vec{p}_1$，$\vec{p}_2$ を横に並べた行列 $(\vec{p}_1,\ \vec{p}_2)$ を P とおき，$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とおくとき，$A\vec{p}_1=\lambda_1\vec{p}_1$，$A\vec{p}_2=\lambda_2\vec{p}_2$ は

$$AP=(\lambda_1\vec{p}_1\quad \lambda_2\vec{p}_2)=PB, \quad \therefore\ A=PBP^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

と表される．(＊)の両辺を n 乗して

$$A^n=(PBP^{-1})^n$$
$$=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots\cdots(PBP^{-1}) \qquad (n\text{個の積})$$
$$=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B\cdots\cdots(P^{-1}P)BP^{-1} \qquad (B\text{は}n\text{個})$$
$$=PB^nP^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

を利用して，A^n を計算することもできる．(☞B. 811)

B.1026

x，y，z の連立１次方程式

$$(E)\begin{cases} ax-by+z=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ x+ay-bz=0 & \cdots\cdots\cdots ② \\ ax+y-bz=0 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 以外の解をもつための，a，b の条件を求めよ．

アプローチ x，y，z のうち１つを消去して，２つの未知数の連立方程式に帰着させて考えましょう．

解答 ①から得られる $z=-ax+by$ ……… ①′ を②，③に代入すると，x，y の連立方程式

$$\begin{cases} x+ay-b(-ax+by)=0 \\ ax+y-b(-ax+by)=0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} (1+ab)x+(a-b^2)y=0 & \cdots\cdots\cdots ④ \\ a(b+1)x+(1-b^2)y=0 & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

が得られる．

④，⑤の解が $x=0$，$y=0$ だけとすると，①′ より $z=0$ となり，連立方程式 (E) の解は $x=0$，$y=0$，$z=0$ に限られる．

したがって，求める条件は，④，⑤が $x=0$，$y=0$ 以外の解をもつことである．その条件は，係数行列 $\begin{pmatrix} 1+ab & a-b^2 \\ a(b+1) & 1-b^2 \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないことであるから，

B. 809 参照 ▶

$$(1+ab)(1-b^2)-(a-b^2)a(b+1)=0$$
$$(b+1)\{(1+ab)(1-b)-(a-b^2)a\}=0$$
$$-(a-1)(b+1)(a-b+1)=0$$

より，

$$\boldsymbol{a=1,\ b=-1} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{a-b+1=0}$$

である．

[注]　求めた条件は (E) の係数行列 $\begin{pmatrix} a & -b & 1 \\ 1 & a & -b \\ a & 1 & -b \end{pmatrix}$ が逆行列をもたない条件に等しい．

一般の３次正方行列が逆行列をもつ（または，もたない）ための条件などは，大学で学習するはずの「線形代数」の守備範囲である．

索　引

各項目の事項を記載してある箇所を示すのに，

A篇(基礎理論)に関しては，小節の番号と共に(　)内にページも記しておいた．

B篇(演習問題)に関しては，当該番号のみを示してある．

さ

▨ た ▨

▨ な ▨

▨ は ▨

▨ ま ▨

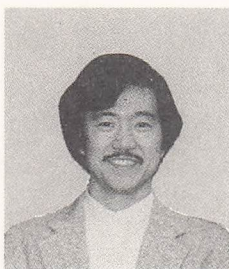
著者の先生方の横顔

ふじ た　　ひろし
藤田　宏

東海大学教授，東京大学理学部名誉教授

学生時代にすでに数学教育の重要性を認識，本書の前身「東大への数学」を執筆，日本数学会理事長，日本応用数理学会会長，東大理学部長などの研究教育・学術行政の要職の合間をぬって，数学教育国際委員会日本代表，文部省教育課程審議会委員，数学オリンピック財団理事長なども歴任され，数学教育に関し国際的・国内的に活躍してこられました．

ながおかりょうすけ
長岡亮介

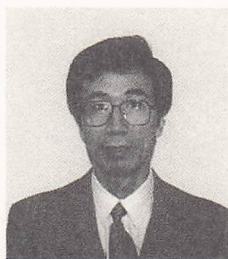
放送大学教授

「東大に入って最も良かったことの１つは藤田宏先生にめぐりあえたこと」ということで，「大学への数学」との出会いも，藤田ゼミ時代．技術的数学に飽きたらず，その意味を求めて「数学史と数学教育にさまよい込んだ」ということで，今では「趣味は数学教育」だそうです．

東大や早大でも講義をなさっているので，先輩たちには，先生に習った人もいるかもしれませんよ！

長崎憲一（ながさきけんいち）

千葉工業大学工学部教授

明快な関数解析の講義に引かれて藤田ゼミを選び，初めて非線形微分方程式論と出会って以来，現在までその研究を続けていらっしゃいます．

先生の目標は，研究面だけでなく，大学において数学をわかりやすく教えるという点でも，藤田先生に近づくこととのことです．そのためにも，高校数学の実状を再確認できた本書のための仕事は非常に有益だったそうです．

長岡恭史（ながおかやすふみ）

東進ハイスクール講師

駿台予備学校講師を経て，現在，東進ハイスクール講師．

若い情熱と誠実な教え方で，生徒の信頼と尊敬を集めていらっしゃいます．

受験指導の現場を数多く経験した立場から“使いやすく”“わかりやすい”「大学への数学」のために多くの提案を出して頂きました．なお，先生は長岡亮介先生の弟さんです．

◆◆◆ 研文書院 編集部より ◆◆◆